CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

LAÍS MACEDO DE ALMEIDA NUNES

DISCUTINDO CONCEITOS DE EDUCAÇÃO FINANCEIRA E INVESTIMENTOS FINANCEIROS: UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA A EDUCAÇÃO BÁSICA

Belo Horizonte
2022

LAÍS MACEDO DE ALMEIDA NUNES

DISCUTINDO CONCEITOS DE EDUCAÇÃO FINANCEIRA E INVESTIMENTOS FINANCEIROS: UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA A EDUCAÇÃO BÁSICA

Dissertação apresentada ao Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título de Mestre.

Orientador(a):
Érica Marlúcia Leite Pagani

Banca Examinadora:
Ivail Muniz Júnior
Valéria Guimarães Moreira

Belo Horizonte
2022

Nunes, Laís Macedo de Almeida.
N972d Discutindo conceitos de educação financeira e investimentos financeiros: uma sequência didática para a educação básica / Laís Macedo de Almeida Nunes. – 2022.
158 f.

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.
Orientadora: Érica Marlúcia Leite Pagani.
Dissertação (mestrado) – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais.

1. Matemática (Ensino Fundamental) – Estudo e ensino – Teses. 2. Educação financeira – Teses. 3. Investimentos – Teses. 4. Finanças – Teses. 5. Didática – Teses. I. Pagani, Érica Marlúcia Leite. II. Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais. III. Título.

CDD 372.241

Elaboração da ficha catalográfica pela bibliotecária Jane Marangon Duarte, CRB 6ª 1592 / Cefet/MG

LAIS MACEDO DE ALMEIDA NUNES

DISCUTINDO CONCEITOS DE EDUCAÇÃO FINANCEIRA E INVESTIMENTOS FINANCEIROS: UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA A EDUCAÇÃO BÁSICA

Dissertação apresentada ao Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título de Mestre.

APROVADA: 18 de março de 2022

Laís Macedo de Almeida Nunes
(Autora)

Érica Marlúcia Leite Pagani
(Orientadora)

Belo Horizonte
2022

“Ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para sua própria produção ou a sua construção” - Paulo Freire.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, Marta e Carlos, por tudo, mas principalmente por valorizarem minha educação. Se hoje recebo título de mestre, é por vocês. Em especial, agradeço ao meu pai por toda a paciência e orientação em relação às finanças pessoais durante a escrita do meu trabalho.

Às minhas irmãs, Júlia e Natália, por todo o apoio durante esse processo, mesmo que de longe.

Ao meu namorado, Filipe, pela paciência, por me apoiar nos estudos e por acreditar em mim.

A todos os meus colegas de curso. Um mestrado não se constitui apenas pela dissertação, e sim por todo o trabalho desenvolvido durante o curso. Agradeço-os pela amizade, pelos estudos compartilhados e pelas trocas didáticas durante esses 2 (ops...) 3 anos.

Ao PROFMAT e ao CEFET/MG pela oportunidade de realizar o curso. Em especial, como representante discente, agradeço a todos os membros do colegiado.

Aos professores do programa, por contribuírem com minha formação e me tornarem uma professora melhor.

Ao GEPEFin e seus membros, Valéria, Bruno e Érica, pelas ricas discussões que colaboraram com meus estudos. Agradeço especialmente ao Bruno pela parceria.

A professora Érica, por abraçar meu projeto, pela orientação de qualidade e ser sempre solícita nos meus momentos de dúvida. Cresci muito como pesquisadora e professora ao seu lado.

Aos criadores da OBInvest, pela iniciativa incrível dessa Olimpíada que tanto contribuiu à criação do meu produto educacional.

Ao meu coordenador Breno e minha diretora Cláudia, por acreditarem em mim e em meu projeto, me dando todo suporte, incentivo e autonomia para desenvolvê-lo. Agradeço também, a todos os estudantes que participaram e contribuíram para a execução do projeto.

Aos meus amigos Renato, Pietro, Ana e Alan, que contribuíram ao longo do processo de escrita da minha dissertação.

Às minhas amigas Milu, Beta e Lets, pela escuta e paciência em momentos de desespero.

À minha terapeuta Rívia, por ter me ajudado a manter a saúde mental durante esse processo.

Ao Joaquín, pelo apoio emocional deixando meus dias mais alegres.

À minha cunhada, Thaís, pela revisão ortográfica do trabalho.

Aos avaliadores titulares e suplentes, Ivail Muniz, Valéria Moreira, Renata Alves e Fernanda Ferreira, por aceitarem prontamente o convite à banca e pelas valiosas contribuições ao trabalho e à pesquisa.

A todos que, diretamente ou indiretamente, torceram por mim durante toda minha trajetória.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

RESUMO

A Educação Financeira promove o desenvolvimento de competências pessoais, possibilitando ao indivíduo maior condição para a tomada de decisões no âmbito financeiro. Em função de sua importância e relevância, esse tema tem sido crescentemente valorizado, ganhando espaço em diversas esferas nos últimos anos, principalmente no âmbito escolar. Tal contexto justifica a apresentação dessa pesquisa de mestrado no programa de Mestrado Profissional de Matemática em Rede Ampla (PROFMAT) no Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais-CEFET-MG, que busca abordar e discutir questões relativas à Educação Financeira na Educação Básica, com objetivo de construir uma sequência didática que aborde a teoria de investimentos financeiros para alunos do 9º ano do ensino fundamental e investigar se tal sequência contribui para a educação financeira desses estudantes. A presente pesquisa é de natureza qualitativa e os procedimentos metodológicos utilizados foram a observação participante, questionários, gravações de áudio e vídeo. O desenvolvimento das atividades foi alicerçado por uma sequência didática, elaborada na perspectiva da Educação Financeira Escolar, à luz das orientações da Estratégia Nacional de Educação Financeira, ENEF, (2011) e das diretrizes da Base Nacional Comum Curricular - BNCC (2018). Nesse sentido, a sequência didática explora temáticas como Educação Financeira, Matemática Financeira, Calculadora do Cidadão, taxas de juros, taxa Selic, inflação e investimentos em Renda Fixa e Variável. Essa sequência foi aplicada de maneira remota, devido à pandemia da Covid-19, no formato de um minicurso extraclasse, com quatro encontros de uma hora e meia de duração cada. Em seguida, analisamos as discussões levantadas durante o minicurso e o material coletado. Os dados analisados fornecem indícios de que o desenvolvimento dessa sequência oportunizou discussões de conceitos e aspectos financeiros promovendo a Educação Financeira dos estudantes. Reiterando a relevância da Educação Financeira Escolar, esperamos que esse trabalho e seus resultados sirvam de estímulo e auxílio para outros professores que desejem trabalhar com Educação Financeira e Investimentos na Educação Básica.

Palavras-chave: Educação Matemática. Educação Financeira. Investimentos Financeiros. Ensino Fundamental. Sequência Didática.

ABSTRACT

Financial Education promotes the development of personal skills, enabling greater conditions for the individual to make decisions in the financial framework. Regarding its relevance, Financial Education area has been increasingly growing, gaining space in several fields over the last years, especially in school context. Such scenario justifies this masters research conducted in Programa de Mestrado Profissional de Matemática em Rede Ampla (PROFMAT) at the Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais-CEFET-MG, that aims to address and discuss issues regarding Financial Education in Basic Education, with the objective of creating a didactic sequence that addresses financial investments theory, for students in the 9th year of Basic Education (in Brazilian system) and investigate whether this sequence contributes to the financial education of these students. This research is qualitative and the methodological procedures used were participant observation, questionnaires, audio and video recordings. The development of activities was based on a didactic sequence, elaborated within the perspective of Scholar Financial Education under the guidelines provided by the Brazilian National Strategy for Financial Education - ENEF (2011) and the Brazilian National Common Curriculum Base - BNCC (2018). Thus, the didactic sequence explores themes such as Financial Education, Financial Mathematics, the Citizen Calculator (Calculadora do Cidadão), interest rates, the Brazilian Selic rate, inflation, fixed income investments and variable income investments. The sequence was remotely performed due to the COVID-19 pandemic, in a mini out-of-class course format consisting in four meetings of one-and-a-half-hour duration each. Then, we analyzed the discussions raised during the mini-course and the material collected. The analyzed data lead us to believe that the development of this sequence provided an opportunity to discuss concepts and financial aspects, promoting the students' Financial Education. Reiterating the importance of School Financial Education, we expect that this research and its results could also stimulate and assist teachers that wish to work with Financial Education in Basic School.

Key-words: Mathematics Education. Financial Education. Financial Investments. Basic Education. Didactic Sequence.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A Educação Financeira tem ganhado espaço na esfera social nos últimos anos, especialmente no que tange à sua abordagem no ambiente escolar devido a sua relevância em no mundo contemporâneo. A exemplo, temos a criação da Estratégia Nacional de Educação Financeira (ENEF) em 2010, que tem como objetivo promover a Educação Financeira por meio de ações voltadas à população e; a homologação, em 2018, da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), documento normativo escolar que traz a Educação Financeira contextualizada em todo o Ensino Fundamental e Médio.

Durante meu percurso como discente na Escola Básica, senti falta de projetos e ações que desenvolvessem conhecimentos e reflexões na área de finanças. Tive acesso à Educação Financeira por meio dos meus familiares, e pude identificar que não eram todos meus colegas que discutiam questões financeiras com suas respectivas famílias.

Desde então, sempre me vi questionando a forma com que a Educação Financeira era estimulada à sociedade. No caso, percebi que o desenvolvimento de habilidades de Educação Financeira geralmente ocorria apenas na fase adulta e tão somente por necessidade e urgência.

Sou licenciada em Matemática pela Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG) e atuo na área da educação desde que me formei. Durante minha trajetória no Ensino Superior, não tive contato com nenhuma disciplina que discutisse conceitos de Matemática Financeira e muito menos que envolvesse contextos e discussões no âmbito da Educação Financeira. Em um dos meus primeiros estágios, fui monitora em um curso preparatório para o concurso do Banco do Brasil, e tive contato com questões de finanças nas quais eram necessários estudos prévios para cumprir meu papel como monitora. A partir disso, pude perceber uma lacuna na formação do professor de Matemática no que tange a área de finanças, em especial, na área de Educação Financeira.

Como educadora e professora do Ensino Básico, acredito que a escola tem um papel fundamental em desenvolver a Educação Financeira dos estudantes, de maneira a contribuir para a formação de um cidadão crítico e preparado para tomada de decisões. Por isso, acreditando no mestrado como uma ferramenta de complementação pedagógica, não tive dúvidas ao decidir o tema que gostaria de pesquisar e me aprofundar. Sendo assim, iniciei meu projeto de pesquisa de mestrado que busca abordar e discutir questões relativas à Educação Financeira na Educação Básica.

Considerando a amplitude da área voltada ao estudo da Educação Financeira, foi necessário delimitar o tema de pesquisa, e a partir disso surgiu a temática de Investimentos

Financeiros, devido à interesses pessoais acerca da temática. Dessa forma, o objetivo dessa pesquisa de mestrado é CONSTRUIR UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA QUE ABORDE A TEORIA DE INVESTIMENTOS FINANCEIROS PARA ALUNOS DO 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL E INVESTIGAR SE TAL SEQUÊNCIA CONTRIBUI PARA A EDUCAÇÃO FINANCEIRA DESSES ESTUDANTES.

À vista disso, temos como objetivos específicos:

- Fazer uma revisão bibliográfica sobre Educação Financeira, Matemática Financeira e Investimentos Financeiros;
- Identificar quais os tipos de investimentos podem ser abordados em turmas do 9º ano do Ensino Fundamental;
- Elaborar uma sequência didática que aborde Educação Financeira e Investimentos Financeiros;
- Desenvolver um material de apoio, baseado na sequência didática, para ser utilizada em um minicurso;
- Elaborar um questionário inicial de sondagem e um questionário final de *feedback;*
- Analisar as respostas e discussões apresentadas no minicurso e nos questionários, para observar de que maneira o desenvolvimento dessa sequência didática, junto aos estudantes, contribuiu para a produção de significado a respeito de investimentos, e como consequência contribuir para Educação Financiara desses estudantes.

Em relação a sequência didática, após sua elaboração, esta foi ministrada no formato de um minicurso extraclasse, desenvolvida juntamente a 62 estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental, os quais foram divididos em duas turmas. O minicurso contou com quatro aulas de uma hora e meia de duração uma vez por semana, ministradas de maneira online devido ao modelo de ensino remoto instaurado durante a pandemia da Covid-19.

Esta dissertação estrutura-se em sete capítulos. Neste presente capítulo, buscamos apresentar a motivação da pesquisa, a proposta do tema e o objetivo de pesquisa. No capítulo 2, apresentamos considerações acerca do tema de Educação Financeira, em especial a Educação Financeira Escolar.

No capítulo 3, tratamos diferentes conceitos matemáticos que compõem a área da Matemática Financeira. Dessa forma, apresentamos os conceitos de porcentagem, função afim, função exponencial, progressão aritmética, progressão geométrica, taxa de juros, juros simples e juros compostos. O objetivo desse capítulo é se aprofundar matematicamente nesses conceitos, de maneira a auxiliar o professor a utilizar definições matemáticas como ferramenta para discussões sobre temas ligados à Educação Financeira.

O capítulo 4 traz conceitos importantes em relação ao mercado financeiro, discutindo taxas importantes para a economia, como a SELIC, inflação e CDI, bem como abordagens acerca dos diferentes tipos de investimentos em Renda Fixa e em Renda Variável, como a Caderneta de Poupança, CDB, Tesouro Direto, LCI/LCA, Debêntures, Ações, Fundos e Criptomoedas.

Após os estudos e revisões bibliográficas apresentadas nos capítulos 2, 3 e 4, pudemos elaborar o produto educacional que se compõem da sequência didática e o material produzidos para o minicurso. Daí, no capítulo 5 apresentamos a metodologia e o contexto de pesquisa, seguido do capítulo 6, no qual tratamos os dados coletados por meio de dois questionários – inicial e final – e pelos registros feitos durante as aulas do minicurso, e apresentamos uma análise qualitativa e descritiva dos dados obtidos. Por fim, o capítulo 7 traz as considerações finais sobre a pesquisa, bem como as reflexões em relação ao material produzido e ao objetivo proposto inicialmente.

2 EDUCAÇÃO FINANCEIRA

A Educação Financeira é considerada um tema pertinente da contemporaneidade, devido a sua importância para a sociedade e para o indivíduo e, tendo em vista sua relevância, o tema tem sido alvo de estudos e pesquisas em âmbito nacional e internacional. Nos anos 2000, a Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE), uma organização que tem como objetivo estimular o progresso econômico e comércio mundial, realizou um grande estudo com intuito de medir o nível de educação financeira dos cidadãos e propor possíveis estratégias de intervenções.

Esse estudo mostra que muitos dos consumidores possuem baixo nível de alfabetização financeira e carecem de uma conscientização sobre o tema. Sobre isso, é possível definir o termo analfabetismo financeiro, que segundo Freitas (2021), é utilizado para designar a ignorância de um indivíduo em relação a temas básicos de finanças como controle financeiro, cálculo de juros, pesquisa de preços, planos de poupança e investimentos, entre outros. Benedetti (2019), afirma que "o analfabeto funcional é aquele que lê e não compreende o que está lendo, já o analfabeto financeiro é aquele que não sabe o que faz com o dinheiro. Não tem controle de suas finanças e não compreende" (s/p).

Outro termo importante a ser definido é literacia financeira, que se associa de maneira antônima ao analfabetismo financeiro, podendo ser definido como a

> capacidade de ler, analisar, gerir e comunicar sobre a condição financeira pessoal e à forma como esta afeta o seu bem-estar material. Ela inclui a capacidade de decidir entre escolhas financeiras, discutir assuntos financeiros e monetários sem desconforto, planejar o futuro e responder de forma competente às situações do dia-a-dia que envolvem decisões financeiras incluindo acontecimentos na economia geral (ORTON, 2007, p. 8 *apud* SOMAVILLA; BASSOI, 2016, p.10)

Após estudos e pesquisas em nível internacional sobre o nível de literacia financeira da população, a OCDE publicou o documento intitulado *Recomendações sobre princípios e boas práticas para a Educação e Conscientização Financeira* (OCDE, 2005), no qual define Educação Financeira como

> o processo pelo qual consumidores e investidores financeiros aprimoram sua compreensão sobre produtos, conceitos e riscos financeiros e por meio de informação, instrução e/ou aconselhamento objetivo, desenvolvem as habilidades e a confiança para se tornarem mais conscientes de riscos e oportunidades financeiras, a fazer escolhas mais informadas, a saber onde buscar ajuda, e a tomar outras medidas efetivas para melhorar seu bem-estar financeiro. (OCDE, 2005, p. 5)

A definição de Educação Financeira proposta pela OCDE tem como foco as finanças pessoais, com o objetivo de influenciar os hábitos, atitudes e comportamentos financeiros das pessoas (SILVA; POWELL, 2013). No entanto, mais do que isso, a Educação Financeira deve ser entendida "como o processo capaz de levar um analfabeto financeiro ao estado de literacia financeira" (FREITAS, 2021, p. 22).

Dessa forma, entendemos que a Educação Financeira é capaz de estimular no indivíduo o desenvolvimento de habilidades pessoais e sociais relativas a finanças, bem como proporcionar-lhe maiores qualificação e capacidade para a tomada de decisões conscientes e eficientes. Nessa mesma perspectiva, Borges (2010, p. 9) afirma que "a educação financeira é fundamental na gestão das finanças pessoais, principalmente no tocante ao acompanhamento e controle do planejamento financeiro".

Savoia, Saito e Santana (2007) acrescentam que a Educação Financeira influencia diretamente nas decisões econômicas individuais e em sociedade, e, nesse contexto, a OCDE (2005) recomenda que o processo de Educação Financeira deve ser considerado como uma ferramenta para o crescimento e estabilidade da economia nacional. Silva e Powell (2015) afirmam que "uma população alfabetizada financeiramente reverte ações positivas para o governo ao tomar decisões mais fundamentadas e ao exigir serviços de maior qualidade, estimulando a concorrência e a inovação do mercado" (p. 17).

Dessa maneira, em função de sua importância para o indivíduo e a sociedade, a temática de Educação Financeira tem ganhado espaço em diversas esferas ao longo dos últimos anos. Diante desse cenário, consideramos relevante tratar o contexto histórico em que a temática foi e tem sido discutida e proposta no Brasil.

2.1 Um breve panorama da Educação Financeira no Brasil

Até a década de 1990, a Educação Financeira era entendida como dicas de preservação e multiplicação de seu patrimônio por meio de investimentos (ARAUJO; CALIFE, 2014). Essas dicas se voltavam apenas para uma pequena parcela da população que possuíam recursos para tal. Até então, boa parte da população, enfrentava dificuldades financeiras que contribuíram para que não conseguissem planejar sua vida financeiramente, muito menos fazer investimentos financeiros.

A história do Brasil conta com uma grande instabilidade econômica, gerando uma hiperinflação, que corroía o poder de compra e comprometia a capacidade de planejamento econômico-financeiro a longo prazo. "Nesse tempo, os brasileiros conviviam diariamente com a necessidade de consumo imediato em razão da perda de poder de compra, afinal, era comum se comprar um produto pela manhã e ao final do dia o preço ser reajustado" (SOUZA, 2020, p. 74).

Com a implementação do Plano Real em 1994, a situação econômica do país foi melhorando gradualmente, de maneira a permitir que os brasileiros de renda baixa-média pudessem se planejar financeiramente a longo prazo (CERBASI, 2019). Alguns fatores foram cruciais para essa melhora, como o controle da inflação, a expansão da bancarização e o acesso ao crédito (ARAUJO; CALIFE, 2014).

Nos anos de 2000, foi lançado no mercado brasileiro o livro "Pai Rico, Pai Pobre" de Robert Kiyosak, que se tornou um best-seller nas vendas e até hoje é um dos livros mais vendidos na área de finanças. O livro aborda a importância que o indivíduo tem na administração de suas próprias finanças, e tem como uma das suas maiores críticas o fato de o sistema educacional não instruir, até então, os estudantes quanto a questões financeiras.

Araújo e Calife (2014) apontam que esse livro, assim como outros lançados na mesma época[1], sob a mesma temática, são considerados a base da Educação Financeira no nosso país. Nesse contexto, pode-se perceber que o conceito e a prática da Educação Financeira começaram a mudar quando comparados aos anos 90, no entanto, percebe-se que esse conceito ainda era muito focado em finanças pessoais.

Essas obras se distanciavam consideravelmente da realidade de muitos brasileiros que haviam enfrentado um período de hiperinflação, como já apresentado. O consumo era visto como símbolo de prosperidade e o que aconteceu foi o "alçamento do consumo financiado pelo crédito – ao invés de pelo planejamento – como sinônimo de progresso, de inclusão e de sucesso na vida" (ARAÚJO; CALIFE, 2014, p. 3). Daí, observamos a importância de a Educação Financeira explorar não só questões de finanças pessoais, mas também questões como consumo consciente entre outros.

> De acordo com Silva (2004), a realidade no Brasil é de que as pessoas não foram educadas para pensar sobre dinheiro na forma de administração, o que se vê é que a maioria gasta sem refletir sobre seu contexto financeiro e os impactos futuros. Poupar é importante, mas não é o suficiente. É preciso saber investir, escolher a modalidade mais interessante além da caderneta de poupança. (BORGES, 2010, p. 2)

[1] Seu futuro financeiro – Louis Frankenberg (2000)
Casais inteligentes enriquecem juntos – Gustavo Cerbasi (2004)
Os Segredos da Mente Milionária – T. Harv Eker (2006)

Podemos considerar que a Educação Financeira no Brasil teve como primeira ação pública, a criação do Comitê de Regulação e Fiscalização dos Mercados Financeiros de Capitais (COREMEC) em 2006 (SOUZA, 2020). Esse Comitê, iniciou em 2007, os debates sobre o analfabetismo financeiro no Brasil, e nesse sentido foi realizado uma pesquisa nacional com objetivo de analisar o grau de Educação Financeira dos brasileiros (SOMAVILLA; BASSOI, 2016).

Após essa pesquisa, com a intenção de melhorar o nível de literacia financeira dos brasileiros, foi instituída por meio do Decreto 7.397 de 22/12/2010, a Estratégia Nacional de Educação Financeira (ENEF)[2] e o Comitê Nacional de Educação Financeira (CONEF).

> Art. 1º Fica instituída a Estratégia Nacional de Educação Financeira - ENEF com a finalidade de promover a educação financeira e previdenciária e contribuir para o fortalecimento da cidadania, a eficiência e solidez do sistema financeiro nacional e a tomada de decisões conscientes por parte dos consumidores. (BRASIL, 2010, s/p)
>
> Art. 3º Com o objetivo de definir planos, programas, ações e coordenar a execução da ENEF, é instituído, no âmbito do Ministério da Fazenda, o Comitê Nacional de Educação Financeira – CONEF. (BRASIL, 2010, s/p)

O Decreto 7.397 foi revogado pelo Decreto 10.393 de 09/06/2020, o qual instituiu a nova ENEF e o Fórum Brasileiro de Educação Financeira (FBEF). O atual FBEF substitui o CONEF, extinto em 2019, e visa implementar e estabelecer os princípios da ENEF, divulgar ações, compartilhar informações e promover a interlocução entre os órgãos ou as entidades públicas e as instituições privadas.

A ENEF foi instituída como uma política Estado de carácter permanente para a Educação Financeira, e conta com a participação de diversas instituições privadas, como a Bolsa de Valores de São Paulo (BOVESPA) e o Banco Mundial. Apesar disso, Santos e Pessoa (2016) refletem sobre quais os reais objetivos de uma proposta de Educação Financeira que tenha em sua base a influência de diferentes instituições privadas. Nesse sentido, as autoras questionam: qual seria essa Educação Financeira? Educação para o consumo? Educação para saber lidar com os produtos financeiros? Educação para conhecer essas instituições financeiras? Essas indagações complementam a posição de Silva e Powell (2015) de que o envolvimento de diversas instituições e organizações, tanto pública quanto privadas, "sugere uma diversidade de pontos de vistas e de interesses sendo tratados sob o título de Educação Financeira". (p. 15)

---

[2] Site oficial ENEF: <http://www.vidaedinheiro.gov.br>. Acesso em: 10 out. 2021.

No entanto, a ENEF se baseia no princípio da OCDE de que a "educação financeira deve ser oferecida de forma justa e imparcial" (OCDE, 2005, p. 5), e em seu Plano Diretor consta que

> Essa política contempla apenas ações de interesse público, ainda que fomentadas pela iniciativa privada, desde que tenham carácter não comercial e que não se dediquem a recomendar determinados produtos ou serviços financeiros. O conteúdo deve ser imparcial e técnico, sem viés ideológico, religioso ou de outra natureza. (BRASIL, 2011a, p. 21)

A ENEF adota como referência o conceito de Educação Financeira proposto pela OCDE, adaptado à realidade brasileira (BRASIL, 2011a). A proposta de atuação da ENEF leva em consideração diversos aspectos da realidade do país, como a estrutura do sistema financeiro nacional, a extensão territorial do país e o tamanho da população, a diversidade cultural, as diferenças sociais e as características do sistema educacional brasileiro. (BRASIL, 2011a).

As ações da ENEF têm dois públicos-alvo distintos: o público adulto e o público jovem e infantil. Para este público, a ENEF programou ações em escolas, com intuito de atingir crianças e adolescentes, como recomendava a OCDE: "A educação financeira deve começar na escola. As pessoas devem ser educadas sobre questões financeiras o mais cedo possível em suas vidas" (OCDE, 2005, p. 6). A ENEF afirma que levar a Educação Financeira para a escola seria uma estratégia que beneficiaria não apenas os estudantes, uma vez que estes "levariam esse conhecimento para suas famílias em um efeito multiplicador" (BRASIL, 2011b, p. 2).

Nesse sentido, foi elaborado um documento intitulado *Orientações para Educação Financeira nas Escolas* que tem como finalidade nortear o ensino de Educação Financeira. Esse documento promove a Educação Financeira de maneira a dialogar e articular as diferentes áreas de conhecimento, sugerindo que seja introduzida como um tema transversal a ser desenvolvido por meio de três vertentes: informação, formação e orientação.

Esse documento complementa que a Educação Financeira é importante para o indivíduo e para a sociedade, afirmando que a introdução da Educação Financeira na escola contribui para a formação do cidadão. Em consonância com Somavilla, Silva e Bassoi (2016) que afirmam que a literacia financeira faz parte de uma educação para a cidadania, as Orientações afirmam que "o exercício da cidadania é ingrediente indispensável da construção de uma sociedade democrática e justa, e a Educação Financeira tem como principal propósito ser um dor componentes dessa formação para a cidadania" (BRASIL, 2011b, p. 10).

Após essa breve discussão sobre as orientações da OCDE e ações da ENEF para desenvolver a Educação Financeira da cidadãos, como essa dissertação busca discutir uma proposta de Educação Financeira para a Educação Básica, faz-se necessário explorar e discutir mais a fundo essa temática no âmbito escolar, o que será apresentado na próxima seção.

2.2 A Educação Financeira na Escola

Mesmo que a OCDE indique em suas recomendações que a Educação Financeira deva começar na escola, a definição apresentada pela Organização não pensa na escola como um espaço de Educação Financeira. (MUNIZ, JURKIEWICZ, 2016). Sendo assim, é necessário compreender qual o papel e qual o objetivo da Educação Financeira promovida no ambiente escolar. Britto (2012) afirma que ao educar-se financeiramente um indivíduo, este se torna um consumidor em potencial, podendo ser visto como mercadoria no processo de Educação Financeira.

> Do modo como concebemos a Educação financeira possui como estratégia de perspectiva, ainda que não tenha essa intenção anunciada, possui esse resultado como efeito colateral, tratar indivíduos ao mesmo tempo como mercadorias e consumidores. Ao, "melhor qualificá-los" para que possam cuidar de suas finanças pessoais, dentre outras coisas, acaba contribuindo para que utilizem de modo mais consciente, e com informação qualificada, produtos financeiros, mas principalmente, potencializa sua capacidade de consumir produtos financeiros. (BRITTO, 2012, p. 27)

Nesse mesmo sentido, Silva e Powell (2015) apontam que, em diversos países, o currículo escolar criado após as recomendações da OCDE "não foi construído apenas para atender aos interesses da escola, mas para atender também a outros interesses, como os das instituições financeiras interessadas em formar futuros consumidores para seus produtos financeiros" (p. 4). Tal cenário contrasta o princípio da OCDE de oferecer uma Educação Financeira justa e imparcial.

Dessa forma, entendemos que a Educação Financeira promovida no ambiente escolar não deve propor apenas um conjunto de orientações sobre questões financeiras, pois não é possível generalizar tais orientações, uma vez que dependem do contexto econômico e social de cada estudante. Dessa forma, a Educação Financeira fomentada no ambiente escolar deve ser abordada de maneira a levar os estudantes a refletirem sobre atitudes e ações das pessoas diante das situações financeiras envolvendo consumo, poupança, financiamento, investimentos e previdência (MUNIZ, 2016).

Nesse sentido, Silva e Powell (2013) apresentam que

> A Educação Financeira Escolar constitui-se de um conjunto de informações através do qual os estudantes são introduzidos no universo do dinheiro e estimulados a produzir uma compreensão sobre finanças e economia, através de

> um processo de ensino, que os torne aptos a analisar, fazer julgamentos fundamentados, tomar decisões e ter posições críticas sobre questões financeiras que envolvam sua vida pessoal, familiar e da sociedade em que vivem. (p. 12-13)

Muniz (2016) considera que a Educação Financeira Escolar deve ser um convite a reflexão sobre diferentes aspectos sociais que envolvam dinheiro e suas consequências, de maneira a promover a tomada de decisão consciente, que se faz necessária para a cidadania crítica. Nesse sentido, "o ambiente escolar é propício para a formação de um aluno-cidadão, mais crítico, proativo e autônomo em relação às finanças" (SOMAVILLA; SILVA, BASSOI; 2016, p. 10).

Mesmo considerando o conceito de Educação Financeira Escolar, Mello (2019) contrasta apontando que a abordagem da Educação Financeira nas escolas ainda é frequentemente baseada no ensino da Matemática Financeira.

> Quando se fala em Educação Financeira no universo da Educação Matemática, os professores de Matemática criam um abismo entre o teórico e a realidade, seguindo na contramão dos ensinamentos do Paulo Freire que em sua obra Pedagogia do Oprimido deixa claro que devemos estabelecer uma necessária intimidade entre os saberes curriculares fundamentais e a experiência social dos alunos. (SOUZA, 2020, p. 78)

Na mesma linha, Mello (2019) também aponta que como alguns professores não possuem tempo e porventura nem conhecimento sobre o assunto, muitas vezes a abordagem desse tema baseia-se somente na resolução de exercícios mecânicos, com uma contextualização mínima e utilizando fórmulas que pouco fazem os estudantes refletirem. Nunes e Pagani (2020) corroboram o posicionamento do autor ao elencarem, após sondagem com professores do Ensino Médio, alguns motivos que os inibem de explorar mais a fundo os temas de Matemática Financeira e Educação Financeira. Dentre os motivos, as autoras destacam o pouco tempo destinado ao conteúdo, as limitações dos cronogramas das escolas e a defasagem dos alunos em relação a conceitos básicos fundamentais.

Nesse sentido, Bonfim, Bonatto e Santos (2019) expõem que o Ensino de Matemática Financeira baseado apenas no uso de exemplos artificiais com aplicação de fórmulas não contribui para o desenvolvimento da Educação Financeira, vez que a referida abordagem não permite aos alunos a capacidade de construir significados. Vital (2014) corrobora esse posicionamento, afirmando ainda que o domínio de conteúdos e conceitos da Matemática Financeira não torna as pessoas educadas financeiramente, sendo necessário explorar a Educação Financeira.

Muniz (2016) aponta que a Educação Financeira Escolar deve ser baseada em quatro princípios, sendo eles o convite à reflexão, a conexão didática, a dualidade e a lente multidisciplinar, explicados abaixo e representados também no esquema da Figura 1.

Figura 1 - Os quatro princípios da Educação Financeira Escolar

Fonte: Muniz, 2016, adaptado.

• *Convite à reflexão* – A Educação Financeira Escolar deve oferecer aos estudantes oportunidades de reflexão sobre situações financeiras que contemplem diferentes aspectos, para que possam avaliar e tomar diferentes decisões. Essas decisões são pessoais, e levam em conta a realidade do estudante, seus valores e princípios.

• *Conexão didática* – A Educação Financeira Escolar se diferencia da Educação Financeira oferecida por instituições financeiras, vez que é voltada para questões de ensino e aprendizagem do contexto escolar.

• *Dualidade* – A Educação Financeira Escolar se beneficia da Matemática, enquanto área científica, para entender, analisar e tomar decisões em situações financeiras, enquanto a Matemática se beneficia da Educação Financeira, de maneira que, explorando situações financeiras é possível aprender noções e ideias matemáticas.

• *Lente multidisciplinar* – A Educação Financeira Escolar deve ser entendida como um tema transversal, que busca oferecer múltiplas leituras sobre situações financeiras. Nesse sentido, é possível articular aspectos financeiros, matemáticos, comportamentais, culturais, biológicos e políticos de maneira a dialogar com as diferentes áreas do conhecimento.

O presente trabalho de dissertação foi elaborado levando em consideração tanto a definição de Educação Financeira Escolar quanto os quatro princípios supramencionados. No entanto, por se tratar de uma pesquisa relacionada ao ensino de Matemática, o princípio que enfatizamos é o princípio da *dualidade*, uma vez que entendemos que a Educação Financeira e a Matemática Financeira relacionam-se e complementam-se. Nesse sentido, Borges cita que

> O termo "financeira", segundo Jacob et al. (2000, p.8), "aplica-se a uma vasta escala de atividades relacionadas ao dinheiro nas nossas vidas diárias, desde o controle do cheque até o gerenciamento de um cartão de crédito, desde a preparação de um orçamento mensal até a tomada de um empréstimo, compra de um seguro, ou um investimento". Enquanto, educação "implica o conhecimento de termos, práticas, direitos, normas sociais, e atitudes necessárias ao entendimento e destas tarefas financeiras vitais. Isto também inclui o fato de ser capaz de ler e aplicar habilidades matemáticas básicas para fazer escolhas financeiras sábias" (BORGES, 2010, p. 3).

A Educação Financeira utiliza a Matemática Financeira como ferramenta para operar, analisar e interpretar os cálculos financeiros, enquanto a Matemática Financeira se pauta na Educação Financeira para proporcionar um aprendizado com foco em situações reais. Não obstante, concordamos com Santos e Pessoa (2016) que a Educação Financeira não é apenas um pretexto para se resolver um exercício, mas um detonador de discussões e investigações.

Considerando que a Educação Financeira deva proporcionar aos estudantes uma aprendizagem embasada na realidade, que leve o estudante a pensar, questionar e problematizar questões financeiras, as autoras Santos e Pessoa (2016), apresentam a proposta de relacionar Educação Financeira à Educação Matemática Crítica, baseada nos princípios da Educação Matemática Crítica, ancoradas no trabalho de Skovsmose.

> Skovsmose (2014) pensa na Educação Matemática Crítica como um instrumento que possibilite ler o mundo por meio de números e gráficos, fazendo o uso da Matemática nas práticas sociais. Assim, tem preocupações eminentemente políticas e sociais, refletindo sobre os diversos papéis que a Educação Matemática pode desempenhar na sociedade, a depender dos encaminhamentos que são, ou não, favorecidos. Ela diverge do modelo educacional tradicional, no qual não há espaço para que os alunos levantem questionamentos, hipóteses ou compartilhem os conhecimentos que já possuem. (SANTOS; PESSOA, 2016, p. 33)

Ainda nessa perspectiva de Educação Matemática Crítica, Melo (2019) apresenta em seu trabalho uma discussão se a Matemática Financeira por si só consegue ser crítica, ou seja, se o domínio de conteúdo e conceitos da Matemática Financeira por si só oferecem uma tomada de decisão fundamentada e acertada considerando tanto variáveis matemáticas quanto não matemáticas. O autor aponta que a transição no ensino da Matemática Financeira para uma perspectiva crítica acontece quando trabalhada, também, a Educação Financeira. Por fim, Melo (2019) concluí que "a discussão acerca da criticidade da Matemática Financeira, se trabalhada de forma dissociada da Educação Financeira precisa ser mais aprofundada dentro da área de pesquisa que trata da Educação Financeira Escolar" (p. 30).

Uma vez apresentadas as discussões sobre Educação Financeira, Educação Financeira Escolar e Matemática Financeira, julgamos necessário apresentar, ainda voltado para o ambiente escolar, a forma na qual os documentos normativos brasileiros têm tratado a área de Educação Financeira, incluindo também a Matemática Financeira. Nesse sentido apresentaremos, essa discussão na próxima seção.

2.3 A implementação da Educação Financeira na Educação Básica

A Constituição Federal Brasileira de 1988 dispõe que a educação é um direito social e assegurada à todos. Nesse sentido, com objetivo de legislar sobre diretrizes e bases da educação nacional, após oito anos em discussão, foi promulgada a Lei nº 9.394, Lei de Diretrizes e Bases, conhecida como LDB/96, que define e regulariza o sistema educacional brasileiro, tanto público quanto privado, com base nos princípios constitucionais.

A LDB/96 determina, em seu artigo 26, a criação de uma base nacional comum para os currículos da Educação Básica, sendo permitida sua complementação de acordo com as características e realidade de cada região.

> Art. 26. Os currículos do ensino fundamental e médio devem ter uma base nacional comum, a ser complementada, em cada sistema de ensino e estabelecimento escolar, por uma parte diversificada, exigida pelas características regionais e locais da sociedade, da cultura, da economia e da clientela. (BRASIL, 1996, s/p).

Mesmo a LDB/96 proporcionando grandes avanços à educação brasileira, as orientações para que o ensino pudesse desenvolver um trabalho considerando essa base comum curricular só foi proposta a partir de 1997, com as publicações dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN).

Os PCNs propunham o trabalho com diferentes temas de diferentes áreas do conhecimento – conhecidos como temas transversais – como Ética, Orientação Sexual, Pluralidade Cultural, Meio Ambiente, Saúde, Trabalho e Consumo. Como Freitas (2021) aponta, até então, não se falava em Educação Financeira no ambiente escolar e, devido ao contexto histórico do país naquele momento – economia crescente e inflação controlada –, o tema transversal relacionado a Educação Financeira nestes documentos era a *Educação para o Consumo*.

O PCN para os primeiros ciclos do Ensino Fundamental – hoje referidos como anos iniciais do Ensino Fundamental –, publicado em 1997, tratava a temática de Educação para o Consumo vinculada a disciplina de Matemática, contextualizando situações envolvendo sistema monetário, relativas a salário, pagamentos e consumo.

Para os últimos ciclos do Ensino Fundamental – hoje referidos como anos finais do Ensino Fundamental –, o PCN foi publicado em 1998 e, trazia a temática de Educação para o Consumo, enfatizada sob o título *Trabalho e Consumo,* e mais uma vez vinculada à disciplina de Matemática. O documento aponta que

> Para compreender, avaliar e decidir sobre algumas situações da vida cotidiana, como qual a melhor forma de pagar uma compra, de escolher um financiamento etc. é necessário trabalhar situações-problemas sobre a Matemática Comercial e Financeira, como calcular juros simples e compostos e dividir em partes proporcionais. (BRASIL, 1998, p. 86)

Em 2000 foi proposto os PCN para a última etapa do Ensino Básico – o Ensino Médio – conhecido como PCNEM, documento no qual é sugerida a organização do ensino voltada para o desenvolvimento de competências e habilidades por parte dos estudantes. Esse documento confirma as propostas das versões do PCN para o Ensino Fundamental, em relação à Educação para o Consumo e a importância da Matemática para a inserção de um cidadão crítico em sociedade.

> Em um mundo onde as necessidades sociais, culturais e profissionais ganham novos contornos, todas as áreas requerem alguma competência em Matemática e a possibilidade de **compreender conceitos e procedimentos matemáticos é necessária** tanto para tirar conclusões e fazer argumentações, quanto para o cidadão agir como **consumidor prudente** ou tomar decisões em sua vida pessoal e profissional. (BRASIL, 2000, p. 40, grifos nosso)

Dessa forma, entendemos que o tema de Educação para o Consumo foi um início do tratamento da Educação Financeira em sala de aula. Souza (2020) corrobora ao afirmar que surge, desses documentos, o embrião da Educação Financeira, uma vez que os PCN sugerem uma formação de estudantes que saibam avaliar e tomar decisões relacionadas a área de finanças, sendo a Matemática Financeira mais uma vez enfatizada como uma importante ferramenta para a formação de estudantes mais educados financeiramente.

Dois anos depois, em 2002, com a finalidade de complementar as orientações educacionais dadas pelo PCNEM, publicou-se o PCN+, também destinado ao Ensino Médio.

De acordo com Oliveira *et al* (2013) “os PCN+ vieram suprir a necessidade dos professores em aprender novas metodologias ou novas maneiras de abordar os conteúdos a partir de análises e reflexões sobre o documento” (p. 6). Os autores também apontam que o PCN+ atribui maior importância à contextualização e à interdisciplinaridade entre as quatro grandes áreas: Ciências da Natureza, Matemática, Ciências Humanas e Linguagens e Códigos.

Essa organização do conhecimento por meio de competências e habilidades das quatro grandes áreas é também considerada no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). De acordo com o estudo de Rodrigues, Antunes e Rodrigues (2018), muitas das habilidades listadas na matriz referência do Exame podem ser facilmente contextualizadas por meio da temática Educação Financeira.

Os mesmos autores ainda apontam que durante o período de 2009 a 2017, 60 de 405 questões de Matemática, 14,8%, abordaram temáticas relacionadas à Educação Financeira. Freitas (2021) complementa ao analisar as provas de 2018 a 2020 e, verifica que esse percentual aumentou para 15,2%. Essas questões utilizam a Matemática Financeira como ferramenta e abordam subtemas relacionados à Educação Financeira tais como compras, gastos, empréstimos, dívidas, investimentos, lucros, vendas, entre outros.

Em 2017 e 2018, depois de ampla discussão envolvendo professores de todos o país, foi promulgada a Base Nacional Comum Curricular (BNCC)[3], à luz das orientações dadas pelos PCN. A Base incluiu a Educação Financeira entre os temas transversais propostos à Educação Básica, e segundo Freitas (2021) essa inclusão foi, até então, o ápice de diferentes ações que foram desenvolvidas no âmbito escolar afim de assentar a Educação Financeira Escolar. A seção a seguir apresenta com mais detalhes a BNCC.

2.3.1 A Base Nacional Comum Curricular

A Base Nacional Comum Curricular é um documento normativo que define as aprendizagens essenciais que os estudantes devem desenvolver ao longo da Educação Básica[4]. De modo a assegurar a formação básica comum em todo o país e em todas as instituições pedagógicas, esse documento estabelece competências e diretrizes comuns a todos.

Esse documento aponta que “é necessário que sistemas, redes e escolas garantam um patamar comum de aprendizagens a todos os estudantes, tarefa para a qual a BNCC é instrumento fundamental”. (BRASIL, 2018, p. 8). Dessa forma, a Base serve como referência

[3] Em 2017 foi promulgada a BNCC do Ensino Fundamental, e em 2018 houve uma complementação do documento, incluindo também o Ensino Médio.
[4] A Educação Básica compreende a Educação Infantil, o Ensino Fundamental e o Ensino Médio.

e orientação para a construção dos currículos e projetos políticos pedagógicos das escolas, os quais devem ser elaborados respeitando a especificidade e diversidades de cada região e escola.

A BNCC reconhece que a educação é uma via para uma sociedade justa, democrática e inclusiva e, por isso, as aprendizagens essenciais por elas definidas, devem assegurar aos estudantes o desenvolvimento de competências gerais, que sirvam para uma formação humana e crítica, visando uma sociedade igualitária, equânime e que respeite as diversidades.

Na BNCC, o Ensino Fundamental e o Médio estão organizados pelas quatro grandes áreas do conhecimento, assim como no PCN, o que fortalece as relações e a interdisciplinaridade. Em relação à área de Matemática, o documento afirma que

> O conhecimento matemático é necessário para todos os alunos da Educação Básica, seja por sua grande aplicação na sociedade contemporânea, seja pelas suas potencialidades na formação de cidadãos críticos, cientes de suas responsabilidades sociais. (BRASIL, 2018, p. 265)

Na fase do Ensino Fundamental, a Base destaca a importância do desenvolvimento do letramento matemático, que é definido como

> a capacidade individual de formular, empregar e interpretar a matemática em uma variedade de contextos. Isso inclui raciocinar matematicamente e utilizar conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas para descrever, explicar e predizer fenômenos. Isso auxilia os indivíduos a reconhecer o papel que a matemática exerce no mundo e para que cidadãos construtivos, engajados e reflexivos possam fazer julgamentos bem fundamentados e tomar as decisões necessárias. (BRASIL, 2018, p. 266)

A Base ainda reitera que os processos matemáticos de investigação, resolução de problemas, modelagem e desenvolvimento de projetos devem ser vistos como objetivo, objeto e estratégia durante o Ensino Fundamental, uma vez que tais metodologias inserem o estudante como protagonista de sua aprendizagem e favorecem o letramento matemático.

No Ensino Médio, a área de Matemática visa consolidar, ampliar e aprofundar os conhecimentos adquiridos no Ensino Fundamental, além de construir uma visão integrada da aplicação da Matemática à realidade.

> As aprendizagens previstas para o Ensino Médio são fundamentais para que o letramento matemático dos estudantes se torne ainda mais denso e eficiente, tendo em vista que eles irão aprofundar e ampliar as habilidades propostas para o Ensino Fundamental e terão mais ferramentas para compreender a realidade e propor as ações de intervenção especificadas para essa etapa. (BRASIL, 2018, p. 530)

Outra característica expressiva na BNCC é a orientação dos currículos em relação às novas tecnologias e à cultura digital, as quais têm promovido mudanças significativas na sociedade. No contexto atual de rápidas transformações devido ao desenvolvimento tecnológico, o documento frisa que o compromisso da escola, além de formar cidadãos críticos, é também formar os estudantes para sua inserção no mundo de trabalho.

Sendo assim, a formação escolar deve comprometer-se a auxiliar a construção do projeto de vida pessoal dos estudantes, que é competência prevista na BNCC e, que tem com o intuito auxiliar o estudante a desenvolver o autoconhecimento e os planos para o futuro. O documento afirma que

> o projeto de vida é o que os estudantes almejam, projetam e redefinem para si ao longo de sua trajetória, uma construção que acompanha o desenvolvimento da(s) identidade(s), em contextos atravessados por uma cultura e por demandas sociais que se articulam, ora para promover, ora para constranger seus desejos. (BRASIL, 2018, p. 472)

A BNCC ainda aponta que a escola deve assegurar uma formação que permita os estudantes definir seu projeto de vida, tanto em relação ao estudo e trabalho, quanto as escolhas em relação aos estilos de vida saudáveis, sustentáveis e éticos (BRASIL, 2018). Dessa forma, entendemos que o Projeto de Vida pode ser trabalhado concomitantemente ao tema da Educação Financeira de forma a se complementarem.

Para fortalecer o desenvolvimento do Projeto de Vida pessoal e o protagonismo do estudante, na etapa do Ensino Médio, uma parte do currículo é composto pelos itinerários formativos, que são a parte flexível do currículo. Esses itinerários são escolhidos de acordo com o interesse do estudante e podem ser ofertados no formato de disciplinas, projetos, oficinas, entre outros. O Projeto de Vida tem suma importância na escolha do estudante em relação ao itinerário formativo a se cursar, uma vez que deve desenvolver a capacidade de escolhas responsáveis e conscientes, de acordo com seus anseios e aptidões. Paralelamente, o itinerário formativo pode influenciar diretamente no projeto de vida futuro do estudante.

Com relação às transformações na sociedade, o documento considera como responsabilidade dos sistemas e redes de ensino, assim como das escolas, incorporar propostas pedagógicas que englobem temas contemporâneos de forma transversal e integradora. Entre estes, educação em direitos humanos − incluindo os direitos da criança e adolescente −, educação ambiental, diversidade social e cultural, educação para o consumo, e educação financeira e fiscal.

Em relação a Educação Financeira, a BNCC é resultado de um longo processo que tenta consolidar a Educação Financeira na Escola Básica no Brasil. Como já apresentado, a Base considera a Educação Financeira como um tema contemporâneo que deve ser incorporado nos currículos das escolas, frisando que

> Atualmente, as transformações na sociedade são grandes, especialmente em razão do uso de novas tecnologias. Observamos transformações nas formas de participação dos trabalhadores nos diversos setores da produção, a diversificação das relações de trabalho, a oscilação nas taxas de ocupação, emprego e desemprego, o uso do trabalho intermitente, a desconcentração dos locais de trabalho, e o aumento global da riqueza, suas diferentes formas de concentração e distribuição, e seus efeitos sobre as desigualdades sociais. Há hoje mais espaço para o empreendedorismo individual, em todas as classes sociais, **cresce a importância da educação financeira e da compreensão do sistema monetário contemporâneo nacional e mundial, imprescindíveis para uma inserção crítica e consciente no mundo atual**. (BRASIL, 2018 p. 568. Grifos nossos)

O estudo de conceitos básicos de economia e finanças, como taxas de juros, inflação, aplicações financeiras e impostos foi sugerido pela BNCC, visando o desenvolvimento da Educação Financeira dos estudantes. A Base ainda reitera a característica interdisciplinar da Educação Financeira, sugerindo abordagens de dimensões culturais, sociais, políticas, psicológicas e econômicas.

> Essas questões, além de promover o desenvolvimento de competências pessoais e sociais dos alunos, podem se constituir em excelentes contextos para as aplicações dos conceitos da Matemática Financeira e também proporcionar contextos para ampliar e aprofundar esses conceitos (BRASIL, 2018 p. 269).

Na BNCC, a área de Matemática e suas tecnologias é proposta por cinco unidades temáticas, sendo elas Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e medidas e, Probabilidade e estatística. A abordagem da Educação Financeira e Matemática Financeira na BNCC têm início desde o Ensino Fundamental - Anos Iniciais, sendo que do 1º ao 4º ano, deve-se ser trabalhado o Sistema Monetário Brasileiro no eixo temático das Grandezas e Medidas. No entanto,

> o trabalho com sistema monetário por si só, não garante que a Educação Financeira seja discutida, pois, em muitos casos, isso depende da postura adotada pelo professor para seleção dos conteúdos e para possibilitar uma discussão contextualizada, crítica e reflexiva no ambiente escolar. (VIEIRA, MELO, PESSOA, 2020, p. 8)

Os autores supracitados ainda apontam que, embora a BNCC não deixe explícito, existe um grande potencial para que a Educação Financeira seja trabalhada por meio dessas habilidades. A Educação Financeira aparece de maneira explícita pela primeira vez no 5º ano.

O Quadro 1 explicita as habilidades e suas respectivas unidades temáticas trabalhadas acerca da temática para o Ensino Fundamental – Anos Iniciais.

Quadro 1 - Habilidades indicadas à área de Matemática para o Ensino Fundamental (Anos Iniciais) em relação à Educação Financeira

Ano	Unidade Temática	Habilidade
1º EF	Grandezas e Medidas	**(EF01MA19)** Reconhecer e relacionar valores de moedas e cédulas do sistema monetário brasileiro para resolver situações simples do cotidiano do estudante.
2º EF	Grandezas e Medidas	**(EF02MA20)** Estabelecer a equivalência de valores entre moedas e cédulas do sistema monetário brasileiro para resolver situações cotidianas.
3º EF	Grandezas e Medidas	**(EF03MA24)** Resolver e elaborar problemas que envolvam a comparação e a equivalência de valores monetários do sistema brasileiro em situações de compra, venda e troca.
4º EF	Grandezas e Medidas	**(EF04MA25)** Resolver e elaborar problemas que envolvam situações de compra e venda e formas de pagamento, utilizando termos como troco e desconto, enfatizando o consumo ético, consciente e responsável.
5º EF	Números	**(EF05MA06)** Associar as representações 10%, 25%, 50%, 75% e 100% respectivamente à décima parte, quarta parte, metade, três quartos e um inteiro, para calcular porcentagens, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros.

Fonte: BRASIL, 2018, adaptado.

Assim como no 5° ano, durante o Ensino Fundamental – Anos Finais, 6º ao 9º ano, a Matemática Financeira básica aparece no eixo temático de Números, por meio do cálculo de porcentagens, sendo várias vezes contextualizada no âmbito da Educação Financeira. O Quadro 2 explicita as habilidades e suas respectivas unidades temáticas trabalhadas acerca da temática para o Ensino Fundamental – Anos Finais.

Quadro 2 - Habilidades indicadas à área de Matemática para o Ensino Fundamental (Anos Finais) em relação à Educação Financeira

Ano	Unidade Temática	Habilidade
6º EF	Números	**(EF06MA13)** Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com base na ideia de proporcionalidade, sem fazer uso da “regra de três”, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros.
7º EF	Números	**(EF07MA02)** Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, como os que lidam com acréscimos e decréscimos simples, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, no contexto de educação financeira, entre outros.
8º EF	Números	**(EF08MA04)** Resolver e elaborar problemas, envolvendo cálculo de porcentagens, incluindo o uso de tecnologias digitais.
9º EF	Números	**(EF09MA05)** Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com a ideia de aplicação de percentuais sucessivos e a determinação das taxas percentuais, preferencialmente com o uso de tecnologias digitais, no contexto da educação financeira.

Fonte: BRASIL, 2018, adaptado.

No Ensino Médio, a Educação Financeira pode ser abordada de maneira interdisciplinar em um itinerário formativo, englobando diferentes áreas do conhecimento como Matemática, Linguagens e Ciências Humanas. Esse itinerário pode abordar diversos temas, como história e futuro do dinheiro, orçamento familiar, financiamentos, investimentos, princípios básicos de economia e desigualdade social.

No entanto, o itinerário formativo integra a parte flexível do currículo do Ensino Médio, e, na parte comum, obrigatória a todos estudantes, a Base aborda a temática de Educação Financeira em nove habilidades diferentes. O Quadro 3 explicita as habilidades e competências trabalhadas acerca do tema ao longo dos anos no Ensino Médio.

Quadro 3 – Habilidades indicadas pela BNCC no EM em relação à Matemática Financeira e à Educação Financeira

Ano	Unidade Temática	Habilidade
1ª EM 2ª EM 3ª EM	Números e Álgebra	**(EM13MAT101)** Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais. **(EM13MAT104)** Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica (índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros), investigando os processos de cálculo desses números, para analisar criticamente a realidade e produzir argumentos. **(EM13MAT106)** Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos (usar este ou aquele método contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro etc.). **(EM13MAT203)** Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões. **(EM13MAT303)** Interpretar e comparar situações que envolvam juros simples com as que envolvem juros compostos, por meio de representações gráficas ou análise de planilhas, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso. **(EM13MAT304)** Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros. **(EM13MAT305)** Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros. **(EM13MAT404)** Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais **(EM13MAT503)** Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais.

Fonte: BRASIL, 2018, adaptado.

Observamos que no Ensino Médio, a Educação Financeira não é citada explicitamente, apesar de constar nas habilidades de forma indireta. No desenvolvimento das habilidades EM13MAT101, EM13MAT104 e EM13MAT404, o estudante se torna capaz de interpretar e analisar criticamente dados e recursos como gráficos, taxas e índices em contextos financeiros. Em consequência, outra habilidade é também desenvolvida, EM13MAT106, a qual o estudante utiliza de sua capacidade de interpretar, analisar e calcular possibilidades para uma tomada de decisão mais consciente.

Nas habilidades EM13MAT303, EM13MAT304, EM13MAT305, EM13MAT503 e EM13MAT203, a Educação financeira está atrelada à Matemática Financeira, pois operar, analisar, compreender e interpretar os cálculos financeiros e toda matemática comercial é uma forma de se educar financeiramente, contribuindo assim para a educação financeira dos estudantes, como já apontado por Muniz (2016). No entanto, é necessário que a Matemática Financeira apareça nessas habilidades não apenas com objetivo de contextualizar o conteúdo de funções, mas também para promover discussões acerca da Educação Financeira e promover a literacia financeira dos estudantes.

De maneira geral, Vieira, Melo e Pessoa (2020) expõem que faltam orientações para uma abordagem crítica e reflexiva nas habilidades da BNCC em relação à Educação Financeira. Os autores também afirmam que a Educação Financeira não deve se limitar a contextos para aplicação de conteúdos e conceitos matemáticos, mesmo sabendo da importância de tais conceitos para a aplicação e análise de dados financeiros.

Concordamos com Vieira, Melo e Pessoa (2020) que apesar da inserção da Educação Financeira na BNCC ser um marco na trajetória da temática no Brasil, é importante que haja mais contextualização e um olhar para além de conteúdos da Matemática Financeira. Os autores, assim como Zocolotti, Campos e Denes (2019), apontam que faltam orientações de como esse tema transversal e interdisciplinar deve ser desenvolvido na escola, se tornando um desafio para o professor ir além das diretrizes propostas pelo documento e desenvolver o trabalho com a Educação Financeira de uma maneira crítica e reflexiva.

Entendido o conceito de Educação Financeira, apresentado o contexto histórico dessa temática no Brasil e os documentos que inserem essa temática no âmbito escolar, faz-se necessário apresentarmos os conceitos de Matemática Financeira que também nortearam esse estudo e pesquisa de mestrado.

3 MATEMÁTICA FINANCEIRA

Neste capítulo serão apresentados conceitos da Matemática Financeira que julgamos importantes. Esta é considerada como um importante instrumento para desenvolver a Educação Financeira, uma vez que operar, analisar e interpretar cálculos financeiros e toda a matemática comercial são imprescindíveis à Educação Financeira de um indivíduo. Além disso, esperamos que esse capítulo sirva como base teórica para professores que desejam explorar essa temática em sala e para alunos que desejam aprofundar seus conhecimentos nessa temática.

3.1 Conceitos Básicos da Matemática Financeira

No Ensino Fundamental, a Matemática Financeira trata basicamente de assuntos como razão, proporção, porcentagem, juros simples e juros compostos. No Ensino Médio, geralmente os três primeiros tópicos são tratados em forma de revisão, e a parte de juros é aprofundada atrelando-se aos estudos de funções e progressões (ZOCOLOTTI; CAMPOS; DENES, 2019).

Na abordagem escolhida neste trabalho, para apresentar a Matemática Financeira, será necessário antes explorar conceitos fundamentais, como a noção de porcentagem e taxa percentuais que são a base da Matemática Financeira. Além disso, será exibida a definição de funções, mais especificamente funções afins e exponenciais, que de acordo com a BNCC (BRASIL, 2018), servem como base para explorar questões com o contexto de Matemática Financeira. Por último, será apresentado um pouco sobre progressões e sequências pois, de acordo com Morgado, Zagner e Zani (2005), a Matemática Financeira pode ser apresentada e abordada de maneira natural no Ensino Médio por meio desses conteúdos estudados anteriormente pelos estudantes.

As principais referências utilizadas para elaborar essa seção são Morgado, Zagner e Zani (2005), Lima (2013) e Carvalho e Morgado (2015). Todos os livros são da Sociedade Brasileira de Matemática, sendo os dois último da coleção do PROFMAT.

3.1.1 Porcentagem

É muito comum nos depararmos diariamente com situações que envolvam porcentagem, como no comércio, em bancos e em pesquisas. De maneira geral, podemos dizer que a porcentagem é o conceito mais básico que dá origem a questões de Matemática Financeira.

A taxa percentual é definida como uma razão que corresponde à parte considerada de um total de 100 partes, ou seja, é uma fração de denominador cem. A porcentagem é o resultado obtido ao aplicarmos uma taxa percentual a um determinado valor. O símbolo de porcentagem é “%” e é lido como “por cento”.

O primeiro exemplo abaixo expõe as diferentes formas de se representar uma taxa percentual, e os dois últimos expõem exemplos de cálculos de porcentagem.

Exemplo 3.1: 5% pode ser representado de diferentes maneiras:

• 5% (percentual);

• $\frac{5}{100}$ (fracionária);

• 0,05 (unitária)

Para calcularmos de forma mais rápida alguns acréscimos e decréscimos em relação ao valor de algo, podemos utilizar o fator de aumento e o fator de desconto, respectivamente. A seguir apresentaremos a fórmulas que representam a aplicação desses fatores.

Se uma mercadoria que custa x reais e sofre um aumento por uma taxa i, então o novo valor dessa mercadoria será $x + i \cdot x = x(1 + i)$. Logo, para encontrar o novo valor da mercadoria, basta multiplicar seu valor inicial pelo fator $(1 + i)$, conhecido como *fator de aumento*. De maneira geral, podemos representá-lo por “$1 + taxa\ de\ aumento$".

Analogamente, se uma mercadoria que custa x reais sofre um desconto de i, então o novo valor dessa mercadoria será $x - i \cdot x = x(1 - i)$. Ou seja, para encontrar o novo valor da mercadoria, basta multiplicar seu valor inicial pelo fator $(1 - i)$, conhecido como *fator de desconto*. De maneira geral, podemos representá-lo por “$1 - taxa\ de\ desconto$"

Exemplo 3.2: Devido a elevação da taxa de inflação, os comerciantes se viram obrigados a ajustar o preço das mercadorias para conter o prejuízo. Sendo assim, uma mercadoria, que custava R$ 1.500,00 sofreu um aumento de 8% em seu preço. Qual será o valor dessa mercadoria após o aumento?

<u>Resolução:</u> Se haverá um aumento de 8%, pode-se concluir que o fator de aumento será 1,08 pois,

$1 + 8\% = 1 + 0{,}08 = 1{,}08.$

Logo, basta multiplicar o valor inicial do produto pelo fator de aumento

$1.500 \times 1{,}08 = 1.620.$

Portanto, o valor a ser pago pelo produto após o aumento é de R$ 1.620,00.

Exemplo 3.3: No mês de novembro é comum que o comércio conceda altos descontos para os consumidores devido ao evento conhecido como “Black Friday”. Uma loja vende todos seus produtos a um preço de R\$35,90 e, devido à Black Friday, dará descontos progressivos de acordo com a Figura 2 a seguir. Calcule o valor pago por um consumidor que comprará quatro produtos.

Figura 2 - Exemplo descontos progressivos

Fonte: hardmob.com.br, 2013.

<u>Resolução:</u> O valor dos 4 produtos, sem desconto é de $4 \times 35{,}90 = 143{,}60$. Considerando que haverá um desconto de 60% então o consumidor pagará 40% (100% - 60%) e utilizando o fator de desconto, temos

$40\% \times 143{,}60 = 0{,}40 \times 143{,}60 = 57{,}44$.

Logo, o valor final pago pelo consumidor pelos quatros produtos será R\$ 57,44.

Exemplo 3.4: A conta de luz da casa de Laís em fevereiro de 2021 foi de R\$ 250,00. Em março houve um aumento e a conta foi de R\$ 267,50. Nessas condições, qual foi a taxa percentual de aumento no valor da conta de luz durante o período de fevereiro para março?

<u>Resolução:</u> O valor de R\$ 250 é o nosso todo, nosso referencial, logo

$\frac{267{,}50}{250} = 1{,}07$ (fator de aumento)

e, portanto, a taxa percentual de aumento foi de

$1{,}07 - 1 = 0{,}07 = 7\%$.

Aumentos e Descontos Sucessivos

Apresentadas as definições de porcentagem e taxa percentual e, demonstrados exemplos de aplicação de porcentagem em situações de acréscimo e decréscimo, serão indicadas situações de aumento e descontos sucessivos que serão muito úteis quando apresentado o conceito de Juros Compostos.

Exemplo 3.5: Uma mercadoria custa R$50,00, no entanto, um comerciante decidiu aumentar o seu preço em 20% devido à chegada das festas de final de ano, uma vez que esse produto teria maior procura no mercado. Após as festividades, nem todo o estoque foi vendido, e o comerciante decidiu, então, abater o preço em 25%. Qual o preço da mercadoria após as festividades?

Resolução: Um aumento de 20% implica que o preço será 120% do valor inicial, seguido de um desconto de 25% implica que o preço passará a ser 75% do valor anterior. Logo:

- Aumento: 1,20 × 50
- Desconto: 0,75 × (1,20 × 50)

Logo o valor final é dado por 1,20 × 0,75 × 50 = R$ 45,00.

Visto esse exemplo, podemos generalizar situações de n aumentos e m descontos sucessivos. Sendo $i_1, i_2, \cdots, i_n$, as taxas percentuais de aumento e $j_1, j_2, \cdots, j_m$ as taxas percentuais de desconto sobre um valor inicial V_0, o valor final V_n é dado por

$$V_n = V_0 \cdot (1 + i_1) \cdot (1 + i_2) \cdot \cdots \cdot (1 + i_n) \cdot (1 - j_1) \cdot (1 - j_2) \cdot \cdots \cdot (1 - i_m) \qquad (3.1)$$

no qual os fatores $(1 + i_q)$, com $1 \leq q \leq n$, representam situações de aumento e os fatores $(1 + i_p)$, com $1 \leq p \leq m$, representam situações de descontos.

3.1.2 Funções

O estudo de funções inicia-se desde a época dos babilônios, por meio de análise de tabelas e gráficos para demonstrar a relação entre duas grandezas. No entanto, foi apenas com o desenvolvimento do cálculo infinitesimal, dado por Newton e Leibniz, que se iniciou uma definição mais formal de o que seriam as funções. Foi Leibniz que usou pela primeira vez o termo “função”, em 1673, para designar a relação de dependência entre quantidades variáveis. (RIBEIRO; CURY, 2015).

“O estudo das funções surgiu da necessidade de analisar fenômenos, descrever regularidades, interpretar interdependências, criar modelos matemáticos e auxiliar em tomadas de decisões.” (SOUZA, 2020). Dessa forma, as funções estão muito presentes no nosso dia a dia, tanto em situações que envolvem problemas nas outras áreas de conhecimento, como física, química e biologia e em outros problemas do cotidiano, como o lucro de uma certa empresa, o salário de um vendedor que é composto por uma parte fixa e outra variável, dentre outras.

Definição 1: Sejam A e B dois conjuntos não vazios e f uma relação de A em B. Dizemos que f é uma função de A em B, denotado por $f: A \to B$, se $f$associa todo elemento x do conjunto A a um único elemento y do conjunto B.

O conjunto A é definido como *domínio* da função f, denotado por $D(f)$, e seus elementos são conhecidos como variáveis independentes da função. Já o conjunto B é o *contradomínio* da função f, representado por $CD(f)$, e seus elementos são conhecidos como variáveis dependentes da função. O conjunto de elementos $y \in B$ tal que $y = f(x)$ para algum $x \in A$, é chamado de *imagem* da função f, denotado por $Im(f)$.

O gráfico da função f, $G(f)$, é o conjunto de todos os pontos (x, y) em um sistema cartesiano XOY[5], tal que $x \in D(f)$ e $y \in Im(f)$, podendo ser representado por $G(f) = \{(x, f(x))/x \in D(f)\}$.

Função Afim

Definição 2: Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é afim quando existem $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $f = ax + b$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

O parâmetro b é chamada de *coeficiente linear* da função f e pode ser determinada pelo valor da função quando $x = 0$, ou seja, $f(0) = a \cdot 0 + b = b$. O parâmetro a é chamado de *coeficiente angular* de f, uma vez que está relacionado à inclinação do gráfico em relação ao eixo x. Para determinarmos o valor do coeficiente angular é necessário o conhecimento de dois valores $f(x_1)$ e $f(x_2)$, tal que $x_1, \ x_2 \in D(f)$ sejam distintos e arbitrários. Sendo assim, tem-se

[5] Sistema cartesiano de eixos ortogonais, eixo X e eixo Y; também conhecido como plano cartesiano.

$f(x_1) = ax_1 + b,$
$f(x_2) = ax_2 + b.$

Subtraindo ambas as equações obtemos

$$f(x_2) - f(x_1) = ax_2 + b - ax_1 - b = a(x_2 - x_1).$$

Logo

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}. \quad (3.2)$$

Para analisarmos o comportamento do gráfico de uma função afim, será necessário primeiramente demonstrar duas proposições importantes.

Proposição 3.1: A função afim é contínua.

Demonstração: Uma função é considerada contínua se $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ para todo x_0 pertencente ao domínio. Isso significa que se a função é contínua, então $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Se a função é afim, então

$|ax + b - ax_0 - b| = |a| \cdot |x - x_0| < \varepsilon \Rightarrow |x - x_0| < \frac{\varepsilon}{|a|}$.

Logo, a função afim é contínua.

Proposição 3.2: O gráfico de uma função afim f é uma reta.

Demonstração: Para demonstrar que o gráfico é uma reta, basta mostrar que três pontos distintos pertencentes ao gráfico da função f são colineares. Para isso podemos usar a condição de alinhamento de três pontos desenvolvido na área da Geometria Analítica.

Sejam $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), P_3(x_3, y_3) \in G(f)$. Se $G(f)$ é uma reta, temos que $\det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} = 0.$

Aplicando o método de Sarrus para calcular esse determinante, tem-se

$$\det\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} = (\,x_1y_2 + x_3y_1 + x_2y_3) - (x_3y_2 + x_1y_3 + x_2y_1)$$

$$= x_1(ax_2 + b) + x_3(ax_1 + b) + x_2(ax_3 + b) - x_3(ax_2 + b) - x_1(ax_3 + b) - x_2(ax_1 + b)$$

$$= x_1ax_2 + x_1b + x_3ax_1 + x_3b + x_2ax_3 + x_2b - x_3ax_2 - x_3b - x_1ax_3 - x_1b - x_2ax_1 - x_2b$$

$$= 0.$$

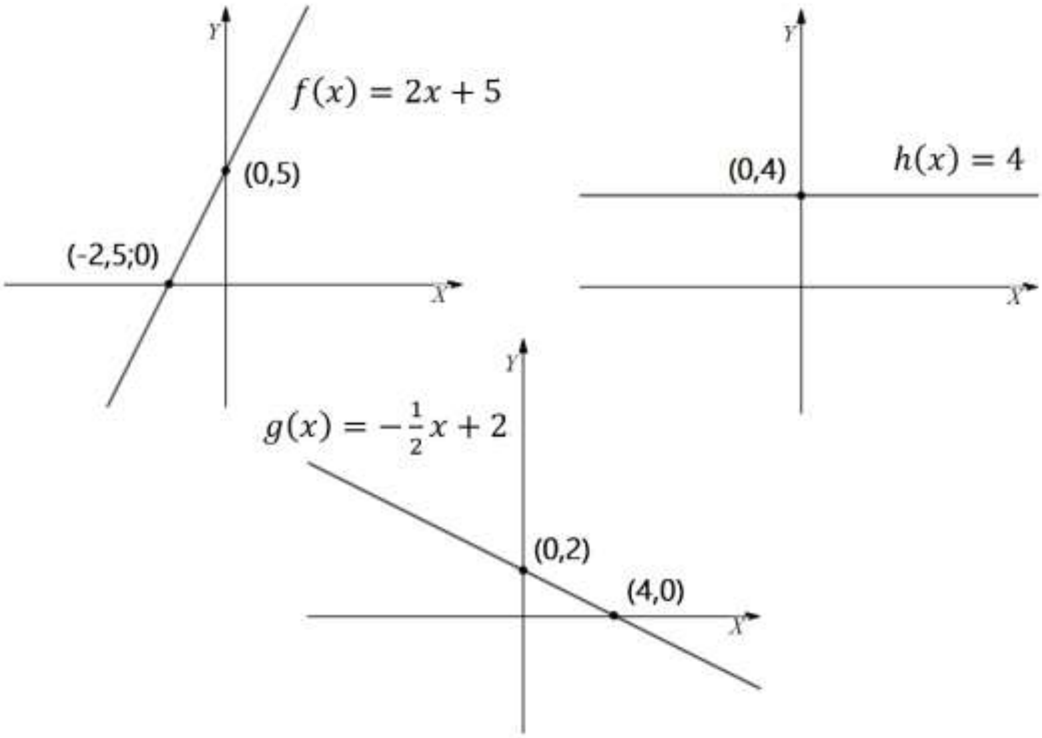
Dessa forma, os pontos P_1, P_2 e P_3 são colineares e, portanto, o gráfico de uma função afim é uma reta.

Graficamente, o parâmetro b carrega a informação de onde a reta corta o eixo das ordenadas, uma vez que $f(0) = b$, e o ponto $(0, b) \in G(f)$. Além disso, podemos utilizar o parâmetro a para analisar o crescimento ou decrescimento dessa função afim. Para isso utiliza-se da equação 3.2.

Considere $x_2 > x_1$. Analisando o sinal de a, temos

- Se $a > 0$, então $f(x_2) - f(x_1) > 0 \Longrightarrow f(x_2) > f(x_1)$ e, portanto, f é crescente.
- Se $a = 0$, então $f(x_2) - f(x_1) = 0 \Longrightarrow f(x_2) = f(x_1)$ e, portanto, f é constante.
- Se $a < 0$, então $f(x_2) - f(x_1) < 0 \Longrightarrow f(x_2) > f(x_1)$ e, portanto, f é decrescente.

Figura 3 - Gráfico de funções afim



Fonte: a autora, 2021.

Um caso particular da função afim é a *função linear*, situação em que $b = 0$. Nesse caso, podemos definir que a função linear é toda função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ax, a \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. A representação gráfica da função linear é uma reta que passa pela origem do sistema cartesiano XOY. Nessa situação, dizemos que a grandeza $y = f(x)$ é diretamente proporcional à grandeza x, e a constante a é chamada de constante de proporcionalidade.

Diz-se que duas grandezas são *diretamente proporcionais* quando elas se correspondem de tal modo que, multiplicando a quantidade de uma delas por um número, a quantidade correspondente da outra fica multiplicada pelo mesmo número.

Em problemas em que as grandezas x e y são diretamente proporcionais, podemos afirmar que se $y_1 = f(x_1) = ax_1$ e $y_2 = f(x_2) = ax_2$ então $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$ é constante e igual a a. Sendo assim, por meio dessa proporção, é possível descobrir um desses quatro valores, x_1, y_1, x_2 ou y_2, quando se conhece os outros três.

Teorema 1: (Teorema Fundamental da Proporcionalidade). Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função crescente. As seguintes afirmações são equivalentes.

1. $f(nx) = nf(x)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in \mathbb{R}$.
2. Pondo $a = f(1)$, tem-se $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
3. $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

Demonstração:

• 1 ⇒ 2:

Provaremos inicialmente que, para todo $r = \frac{m}{n}, m, n \in \mathbb{Z}$, a hipótese 1 acarreta $f(rx) = rf(x)$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$. Como $nr = m$, tem-se:

$n \cdot f(rx) = f(nrx) = f(mx) = m \cdot f(x)$,

$$\Rightarrow f(rx) = \frac{m}{n} f(x) = rf(x).$$

Seja $a = f(1)$. Como $f(0) = f(0 \cdot 0) = 0 \cdot f(0) = 0$, considerando sem perda de generalidade que a função f é crescente, temos que $a = f(1) > f(0) = 0$, portanto, a é positivo e

$f(r) = f(r \cdot 1) = rf(1) = ra$, para todo $r \in \mathbb{Q}$.

Mostraremos agora que se tem $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Suponha, por absurdo, que exista algum real x tal que $f(x) \neq ax$, para isso, admitamos

$f(x) < ax$ (o caso $f(x) > ax$ é análogo). Temos $\frac{f(x)}{a} < x$.

Tomemos um número racional r no intervalo $\left(\frac{f(x)}{a}, x\right)$. Assim,

$$\frac{f(x)}{a} < r < x \Rightarrow f(x) < ar < ax,$$

ou seja, $f(x) < f(r) < ax$.

O que é absurdo, pois, como f é crescente e $r < x$, deveríamos ter que $f(r) < f(x)$.

Portanto, $f(x) = ax$.

• 2 ⇒ 3:

Temos que $f(x+y) = a(x+y) = ax + ay = f(x) + f(y)$, logo 2 ⇒ 3.

• 3 ⇒ 1:

Sendo $n \in \mathbb{N}$, temos que $f(nx) = f(x + x + \cdots + x) = f(x) + f(x) + \cdots + f(x) = nf(x)$.

Considere $m \in \mathbb{Z}$ tal que $m = -n$, temos que

$$0 = f(0) = f\big(nx + (-nx)\big) = f(nx) + f(-nx) \ \Rightarrow -f(nx) = f(-nx)$$

então,

$-nf(x) = f(-nx) \Rightarrow mf(x) = f(mx)$ para todo $m \in \mathbb{Z}$.

Logo, 3 ⇒ 1

E, portanto, 1 ⇒ 2 ⇒ 3 ⇒ 1.

Corolário 1: Seja $f(x)$ uma função que respeita as condições do Teorema 1. Assim, temos que $f(cx) = cf(x)$ para quaisquer $c, x \in \mathbb{R}$.

Demonstração:

Se $f(x)$ respeitas as condições do Teorema 1, então temos que $f(x) = ax$, para todo $x \in \mathbb{R}$, sendo $a \in \mathbb{R}$. Dessa forma, $f(cx) = acx = cax = cf(x)$ para todo $c, x \in \mathbb{R}$.

Considerando o Teorema 1 e a definição de grandezas proporcionais, temos que x e y não são proporcionais quando a função f que relaciona x e y é uma função afim não linear. No entanto, como $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} \Rightarrow \Delta y = a \cdot \Delta x$, temos que as variações de x e y são grandezas proporcionais.

Teorema 2: (Teorema de caracterização da função afim). Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função monótona injetiva, isto é, crescente ou decrescente, tal que $x, h \in \mathbb{R}$. O acréscimo $f(x+h) - f(x) = \varphi(h)$ depende apenas de h, mas não de x, se, e somente se, f for uma função afim.

<u>Demonstração:</u> Suponha, sem perda de generalidade, que f é crescente. Dessa forma a função $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x+h) - f(x) = \varphi(h)$ também é crescente e $\varphi(0) = 0$.

Para quaisquer $h, k \in \mathbb{R}$ temos

$\varphi(h+k) = f(x+h+k) - f(x) \Rightarrow$

$\varphi(h+k) = f\big((x+k)+h\big) - f(x+k) + f(x+k) - f(x) \Rightarrow$

$\varphi(h+k) = \varphi(h) + \varphi(k)$.

Logo, pelo Teorema Fundamental da Proporcionalidade, pondo-se $a = \varphi(1)$, tem-se $\varphi(h) = ah$ para todo $h \in \mathbb{R}$. Isto quer dizer que $f(x+h) - f(x) = ah$. Chamando $f(0)$ de b, resulta $f(h) = ah + b$, ou seja, $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Esse Teorema permite garantir se numa determinada situação problema o modelo matemático a ser usado representa uma função afim. Interpretando o Teorema, podemos dizer que $f(x+h) - f(x)$ não depender de x, significa dizer que acréscimos iguais de x produz acréscimos iguais para $f(x)$.

Compreendido o conceito de uma função afim e seu caso particular, apresentaremos dois exemplos de situações envolvendo função afim inserido no contexto da Matemática Financeira.

Exemplo 3.6: Um vendedor tem parte de seu salário fixo e outra parte do salário variável de acordo com o total de suas vendas durante o mês. A Tabela 1 representa o salário desse vendedor representado em algumas situações. Escreva a função $f(x)$ que relaciona o total de vendas x e o salário do vendedor y e calcule quanto esse vendedor recebe em um mês em que o total de suas vendas foi R$5.000,00.

Tabela 1 - Exemplo 3.6

Total de vendas	Salário
R$ 0	R$ 950
R$ 500	R$ 975
R$ 1.000	R$ 1.000
R$ 1.500	R$ 1.025

Fonte: a autora, 2021.

<u>Resolução:</u> Vamos, inicialmente, mostrar que a função $f(x)$ é afim e, para isso iremos utilizar o resultado do Teorema 2, ou seja, gostaríamos de mostrar que $f(x+h)-f(x)=\varphi(h)$, logo não depende de x.

Considere $h=500$, se $x=0$, tem-se

$f(0+500)-f(0)=f(500)-f(0)=975-950=25.$

Se $x=500$, tem-se

$f(500+500)-f(500)=f(1000)-f(500)=1.000-975=25.$

Se $x=1.000$, tem-se

$f(1.000+500)-f(1.000)=f(1.500)-f(1.000)=1.025-1.000=25.$

Logo observe que mudando o valor de x, $f(x+h)-f(x)$ não depende de x, e, portanto, podemos afirmar que $f(x)$ é uma função afim dada por $f(x)=ax+b$.

Para descobrirmos o parâmetro a usaremos a equação 3.2

$$a=\frac{f(500)-f(0)}{500-0}=\frac{975-950}{500}=\frac{25}{500}=0{,}05$$

e para descobrirmos o parâmetro b, basta utilizar $x=0$, logo

$f(0)=a\cdot 0+b\rightarrow 950=b.$

Sendo assim a sentença matemática que relaciona x e y é $f(x)=0{,}05x+950$.

Querendo descobrir o salário do vendedor quando o total de suas vendas é R$5.000, basta calcularmos $f(5.000)=0{,}05\cdot 5.000+950=250+950=1.200$. Logo o salário do vendedor nessas condições é de $R\$$ 1.200,00.

Exemplo 3.7: A função $V(t)=2.000+70t$ representa o valor acumulado $V(t)$ em uma aplicação em um investimento financeiro, sendo t o tempo em meses. Determine o valor inicial aplicado nesse investimento e a taxa de juros ao mês dessa aplicação.

<u>Resolução:</u> O valor inicial da função é dado quando $t=0$, daí

$V(0)=2.000+70\cdot 0=2.000.$

Logo o valor aplicado nesse investimento foi de R$2.000,00.

Para calcular a taxa de juros dessa aplicação basta descobrirmos o fator de aumento entre dois meses consecutivos. Considere $t=0$ e $t=1$, tem-se

$V(0)=2.000$

$V(1)=2.000+70.1=2.070.$

Logo, o fator de aumento foi de

$\frac{2.070}{2.000} = 1{,}035$,

e a taxa de juros foi de

$1{,}035 - 1 = 0{,}035 = 3{,}5\%$ ao mês.

Função Exponencial

Definição 3: Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita função exponencial quando definida por $f(x) = a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$.

As restrições em relação à base a são necessárias pois, 1 elevado a qualquer número resulta em 1, assim a função seria constante. Além disso, a base não pode ser negativa, nem igual a zero, pois para alguns valores de x a função não estaria definida. Por exemplo:

- Se a função fosse $f(x) = 0^x$, observe que para $x = 0, f(0) = 0^0$, que é indeterminado.
- Se a base fosse -9, a função $f(x) = (-9)^x$ não seria definida em $x = \frac{1}{2}$, pois por propriedades da potenciação e da radiciação teríamos $f(x) = (-9)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-9}$, que não pertence aos números reais.

Assim como na função afim, é também possível caracterizar uma função exponencial para saber se a situação dada realmente pode ser modelada por uma função exponencial.

Teorema 3: (Teorema da caracterização da função exponencial). Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente). As seguintes afirmações são equivalentes:

1. $f(nx) = f(x)^n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.
2. $f(x) = a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, onde $a = f(1)$.
3. $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

Demonstração:

• $1 \Rightarrow 2$:

Provaremos inicialmente que, para todo $r = \frac{m}{n}, m, n \in \mathbb{Z}$, a hipótese 1 acarreta $f(rx) = f(x)^r$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$. Como $nr = m$, tem-se

$f(rx)^n = f(nrx) = f(mx) = f(x)^m$,

$\Rightarrow f(rx) = f(rx)^{\frac{m}{n}} = f(x)^r$.

Assim, pondo $a = f(1)$, temos $f(r) = f(r \cdot 1) = f(1)^r = a^r$ para todo $r \in \mathbb{Q}$. Agora, considerando sem perda de generalidade que a função f é crescente, temos que

$1 = f(0) < f(1) = a$.

Mostraremos agora que se tem $f(x) = a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Suponha, por absurdo, que exista algum real x tal que $f(x) \neq a^x$, para isso, admitamos $f(x) < a^x$ (o caso $f(x) > a^x$ é análogo). É sabido, que existe um número racional r tal que $f(x) < a^r < a^x$, ou seja $f(x) < f(r) < a^x$

Uma vez que como f é crescente, tendo $f(x) < f(r)$ concluímos que $x < r$, no entanto, como $a^r < a^x$ como $a > 1$, temos que $r < x$, o que gera uma contradição.

E, portanto, de fato $f(x) = a^x$.

• 2 ⇒ 3:

Temos que $f(x + y) = a^{x+y} = a^x \cdot a^y = f(x) \cdot f(y)$, logo 2 ⇒ 3.

Isso significa que $f(cx) = a^{cx} = (a^x)^c = f(x)^c$ para todo $c, x \in \mathbb{R}$.

• 3 ⇒ 1:

Sendo $n \in \mathbb{N}$, temos que $f(nx) = f(x + x + \cdots + x) = f(x) \cdot f(x) \cdot ... \cdot f(x) = f(x)^n$.

Considere $m \in \mathbb{Z}$ tal que $m = -n$, temos que

$$1 = f(0) = f\big(nx + (-nx)\big) = f(nx) \cdot f(-nx) = f(x)^n \cdot f(-nx)$$

então,

$$\frac{1}{f(x)^n} = f(-nx) \Rightarrow f(x)^{-n} = f(-nx).$$

Como $m = -n$, então $f(x)^m = f(mx)$, para todo $m \in \mathbb{Z}$.

Logo, 3 ⇒ 1

E, portanto, 1 ⇒ 2 ⇒ 3 ⇒ 1.

Para analisarmos o comportamento do gráfico de uma função exponencial, estudaremos as características da curva exponencial, nome dado ao gráfico dessa função. Primeiramente, será necessário demonstrar algumas proposições importantes.

Proposição 3.3: Se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}; f(x) = a^x$, então $f(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Suponha existir $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = 0$, então, respeitando a propriedade 3 do Teorema 3, para todo $x \in \mathbb{R}$ teremos

$$f(x) = f\big(x_0 + (x - x_0)\big) = f(x_0) \cdot f(x - x_0) = 0 \cdot f(x - x_0) = 0.$$

Logo, f seria identicamente nula, o que é absurdo já que contraria a propriedade 2 do Teorema 3, em que $f(1) = a \neq 0$.

Proposição 3.4: Se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = a^x$, então $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Sabendo que $f(x)$ não é identicamente nula e utilizando a propriedade 3 do Teorema 3 tem se

$f(x) = f\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right)\cdot f\left(\frac{x}{2}\right) = \left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 > 0.$

Proposição 3.5: A função exponencial é contínua.

Demonstração: Provaremos que dado $x_0 \in \mathbb{R}$, tem-se $\lim\limits_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}$.

Se a função é contínua então dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$

Considere $x > x_0$, daí $|x - x_0| < \delta \Rightarrow x - x_0 < \delta$.

Exponenciando ambos os lados da igualdade, tem-se

$a^{x-x_0} < a^\delta \Rightarrow a^x < a^{\delta+x_0} \Rightarrow a^x - a^{x_0} < a^{x_0}(a^\delta - 1) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < a^{x_0}(a^\delta - 1).$

Pela desigualdade de Bernoulli $(1+\varepsilon')^n > 1 + n\varepsilon'$ para $\varepsilon' > 0$.

Suponha $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > (a-1)/\varepsilon'$, teremos que $a < 1 + n\varepsilon' < (1+\varepsilon')^n \Rightarrow a^{\frac{1}{n}} < 1 + \varepsilon'$.

Por propriedades de potência tem-se $a^{\frac{1}{n}} > 1$.

Daí, dado $0 < \delta < \frac{1}{n}$, temos que $1 < a^\delta < a^{\frac{1}{n}} < 1 + \varepsilon'$, e, portanto,

$|f(x) - f(x_0)| < a^{x_0}(a^\delta - 1) < a^{x_0}\cdot\varepsilon' = \varepsilon.$

De maneira análoga, prova-se para $x < x_0$. Logo, a função exponencial é contínua.

Proposição 3.6: Seja a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, com $f(x) = a^x, a > 1$, então f é ilimitada superiormente.

Demonstração: Temos pelo Limite Fundamental e por Bernoulli que

$a^x = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \ln a \cdot \frac{x}{n}\right)^n > (1 + \ln a \cdot x)$

$\lim\limits_{x\to\infty} a^x > \lim\limits_{x\to\infty}(1 + \ln a \cdot x) = +\infty$

logo $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = +\infty$.

Proposição 3.7: Se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = a^x$, então $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$.

Demonstração: Fazendo $x = -n$, temos

$\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = \lim\limits_{n\to\infty} a^{-n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a^n}\right) = 0.$

Proposição 3.8: Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com $f(x) = a^x, a > 1$, então $f'(x) > 0$ e $f''(x) > 0$.

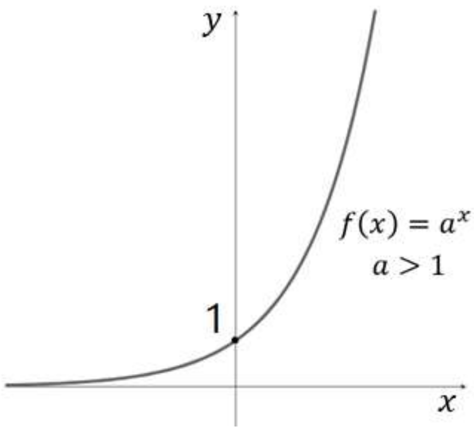
Demonstração: Sabemos que $f'(x) = a^x \cdot \ln a$. Como $a > 1$, então $\ln a > 0$. Pela Proposição 3.4, temos que $a^x > 0$. Portanto, $f'(x) > 0$.

De maneira análoga, temos que $f''(x) = (\ln a)^2 \cdot a^x > 0$.

Pelas proposições, o gráfico $G(f)$ da função exponencial $f(x) = a^x$ com $a > 1$ pode ser representado pela Figura 4. Observe, pela Figura 4, que a função possui um crescimento lento no intervalo $(-\infty, 0)$ e um crescimento acelerado no intervalo $(0, \infty)$.

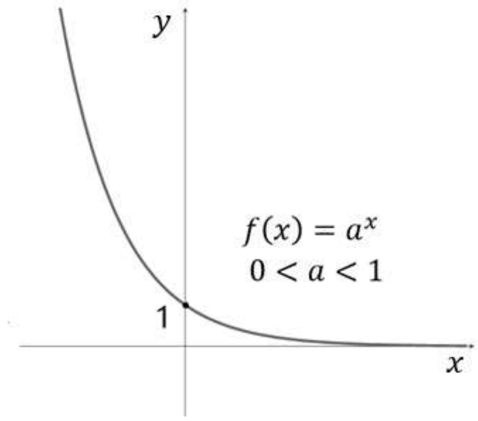
Para analisarmos o gráfico da função exponencial quando $0 < a < 1$, podemos definir $b = \frac{1}{a} > 1$, daí $f(x) = a^x = b^{-x}$. Portanto o comportamento do gráfico é análogo ao da Figura 4, no entanto, refletido em relação ao eixo das ordenadas, como mostrado na Figura 5.

Figura 4 - Gráfico de uma função exponencial para a>1



Fonte: a autora, 2021.

Figura 5 - Gráfico da função exponencial para 0<a<1



Fonte: a autora, 2021.

Uma função $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é considerada do *tipo exponencial* quando se tem $g(\ y\ \ x\ ) = ba^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, em que a e b são constantes positivas. O Teorema 4 a seguir apresenta a caracterização de uma função do tipo exponencial.

Teorema 4: (Teorema de caracterização da função tipo exponencial). Seja $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função monótona injetiva, isto é, crescente ou decrescente, tal que $x, h \in \mathbb{R}$, e o acréscimo relativo $\frac{g(x+h)-g(x)}{g(x)} = \varphi(h)$ ser independente de x. Então, se $b = g(0)$ e $a = \frac{g(1)}{g(0)}$, tem-se $g(x) = ba^x\ \forall x \in \mathbb{R}$.

<u>Demonstração:</u>

Substituindo $g(x)$ por $f(x) = \frac{g(x)}{b}$, onde $b = g(0)$, obtemos $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monótona injetiva, com $\frac{f(x+h)}{f(x)}$ independente de x e, agora, com $f(0) = 1$. Então, pondo $x = 0$ na relação $\varphi(h) = \frac{f(x+h)}{f(x)}$, obtemos $\varphi(h) = f(h)$ para todo $h \in \mathbb{R}$.

Vemos assim que a função monótona injetiva f cumpre $f(x+h) = f(x) \cdot f(h)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$. Segue então do Teorema 4 que $f(x) = a^x$, e, portanto, $g(x) = bf(x) = ba^x$.

Compreendida a função exponencial e suas características, apresentamos um exemplo desse tipo de função contextualizada no âmbito da Matemática Financeira.

Exemplo 3.8: Filipe investiu R$10.000,00 em uma aplicação financeira de baixo risco. A Tabela 2 representa o valor total dessa aplicação (valor investido + rendimento) em função do tempo decorrido em meses.

Escreva a função $g(x)$ que relaciona o tempo x e o valor total da aplicação y. Depois calcule quantos reais Filipe resgatará se aguardar 1 ano desde o início da aplicação.

Tabela 2 - Exemplo 3.8

Tempo (meses)	Valor total da aplicação
0	R$ 10.000,00
1	R$ 10.100,00
2	R$ 10.201,00
3	R$ 10.303,01

Fonte: a autora, 2021

Resolução: Vamos, inicialmente, mostrar que a função $g(x)$ é do tipo exponencial. Para isso iremos utilizar o resultado do Teorema 4, mostrando que $\frac{g(x+h)-g(x)}{g(x)} = \varphi(h)$, ou seja, $\varphi(h)$ não depende de x.

Considere $h = 1$, se $x = 0$, tem-se

$$\frac{g(0+1)-g(0)}{g(0)} = \frac{g(1)-g(0)}{g(0)} = \frac{10.100-10.000}{10.000} = \frac{100}{10.000} = 0{,}01.$$

Se $x = 1$, tem-se

$$\frac{g(1+1)-g(1)}{g(1)} = \frac{g(2)-g(1)}{g(1)} = \frac{10.201-10.100}{10.100} = \frac{101}{10.100} = 0{,}01.$$

Se $x = 2$, tem-se

$$\frac{g(2+1)-g(2)}{g(2)} = \frac{g(3)-g(2)}{g(2)} = \frac{10.303{,}01-10.201}{10.201} = \frac{102{,}01}{10.201} = 0{,}01.$$

Observe que mudando o valor de x, $\frac{g(x+h)-g(x)}{g(x)}$ não depende de x, e, portanto, podemos afirmar que $g(x)$ é uma função do tipo exponencial dada por $g(x) = ba^x$.

Para descobrir os parâmetros a e b podemos utilizar os valores dos pares ordenados (x, y) dados na Tabela 2.

$(0, 10.000)$: $10.000 = ba^0 \Rightarrow b = 10.000$

$(1, 10.100)$: $10.100 = 10.000 \cdot a^1 \Rightarrow a = 1{,}01$

Logo a função g é dada por $g(x) = 10.000 \cdot 1{,}01^x$.

Se Filipe aguardar 12 meses desde o início da aplicação financeira, então tem-se

$g(12) = 10.000 \cdot 1{,}01^{12} \approx 11.268{,}25$,

e, portanto, Filipe resgatará um total de R$ 11.268,25.

3.1.3 Sequências Numéricas

Uma sequência numérica é uma lista ordenada formada por números. O primeiro termo dessa sequência é representado por a_1, o segundo por a_2, o terceiro por a_3, e assim por diante, sendo o enésimo termo representado por a_n.

Em geral, os termos de uma progressão são numerados com os índices a partir do 1, $(a_1, a_2, a_3, \cdots)$, entretanto, há casos em que os índices se iniciam no 0, $(a_0, a_1, a_2, \cdots)$. Estes casos acontecem, normalmente, quando o primeiro termo está associado a um valor inicial, por exemplo, população inicial de uma determinada espécie ou o capital inicial em uma aplicação.

Em relação à quantidade de termos, uma sequência pode ser classificada como finita ou infinita, e em relação ao seu comportamento, como crescente, decrescente, constante ou oscilante.

Dois casos especiais de sequência são as *progressões aritmética (PA)* e a *progressão geométrica (PG).* Ambos os casos serão apresentados e explorados abaixo.

Progressão Aritmética

As progressões aritméticas (PA) são sequências numéricas $(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots)$ nas quais a diferença de dois termos consecutivos é sempre constante e igual r, recebendo o nome de razão. Ou seja, $a_{n+1} - a_n = r$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Podemos generalizar o enésimo termo dessa sequência escrevendo-o em função do primeiro termo a_1 e da razão r.

Teorema 5: Se (a_n) é uma progressão aritmética de razão r, então o termo geral dessa PA é dado por

$$a_n = a_1 + (n-1)r. \tag{3.3}$$

<u>Demonstração:</u> Queremos demonstrar que $a_n = a_1 + (n-1)r$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.
Faremos a demonstração pelo Princípio de Indução Finita.

• $n = 1$: $a_1 = a_1 + (1-1)r = a_1$ (trivial)

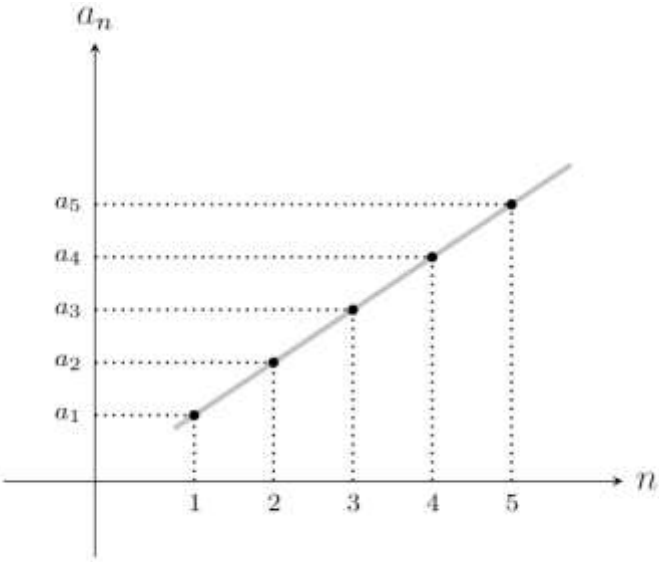
• $n = 2$: $a_2 = a_1 + (2-1)r \Rightarrow a_2 = a_1 + r$ (Verdadeiro pela definição de PA)

Daí, considere válido para um $n = k$, queremos provar que é válido para $n = k + 1$. Temos, pela definição de PA que $a_{k+1} = a_k + r$, e pela hipótese $a_k = a_1 + (k-1)r$. Logo,
$a_{k+1} = a_1 + (k-1)r + r = a_1 + kr$.
Então, $a_n = a_1 + (n-1)r$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.
Se considerarmos que o índice começa no zero, tem-se que $a_n = a_0 + nr$.

A habilidade EM13MAT507 da BNCC (BRASIL, 2018) ressalta que o estudante deve ser capaz de "identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas". Observe que, uma vez que o enésimo termo de uma PA pode ser escrito como $a_n = a_1 + (n-1)r$, isto também representa uma função que associa cada número natural n ao valor a_n. Tomando $a_1 - r = b$ e $r = a$ tem - se
$a_n = a_1 + (n-1)r \Rightarrow a_n = rn + a_1 - r \Rightarrow a_n = an + b$.

Ou seja, uma PA pode ser compreendida como uma restrição da função afim no conjunto dos naturais. O gráfico da PA crescente com razão $r > 0$, ilustrado na Figura 6, é formado pela sequência de pontos, com abscissas naturais, colineares no plano.

Figura 6 - Gráfico de uma PA



Fonte: Morgado e Carvalho, 2015, adaptado.

Teorema 6: A soma S_n dos n primeiros termos de uma PA é dada por

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}. \tag{3.4}$$

<u>Demonstração:</u> Queremos demonstrar que $S_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2}$ é valida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Faremos a demonstração pelo Princípio de Indução Finita.

• $n = 1$: $S_1 = \frac{1(a_1+a_1)}{2} = a_1$

• $n = 2$: $S_2 = \frac{2(a_1+a_2)}{2} = a_1 + a_2$

Daí, considere válido para um $n = k$, queremos provar que é válido para $n = k + 1$. Temos, pela definição de PA que $a_k = a_{k+1} - r$, e pela hipótese $S_k = \frac{k(a_1+a_k)}{2}$. Logo,

$$S_{k+1} = S_k + a_{k+1} = \frac{k(a_1 + a_k)}{2} + a_{k+1} = \frac{k(a_1 + a_{k+1} - r) + 2a_{k+1}}{2}.$$

Pela fórmula da equação geral de uma PA (3.3), temos que $a_{k+1} = a_1 + kr$. Daí,

$$S_{k+1} = \frac{ka_1 + ka_{k+1} - kr + a_1 + kr + a_{k+1}}{2} = \frac{a_1(k+1) + a_{k+1}(k+1)}{2}$$

$$\Rightarrow S_{k+1} = \frac{(k+1)(a_1 + a_{k+1})}{2}.$$

Então $S_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2}$ é valida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Compreendido o que são as Progressões Aritméticas seguem dois exemplos de como esse conteúdo pode ser aplicado em um contexto de Matemática Financeira. No entanto, apontamos que em situações de Matemática Financeira, é comum que o valor inicial da sequência seja considerado como a_0. Sendo assim, neste caso, a fórmula do termo geral de uma PA seria

$$a_n = a_0 + n \cdot r. \quad (3.5)$$

Exemplo 3.9: Carlos aplicou R$500,00 de seu dinheiro em um investimento com rendimento mensal e constante igual a R$10,00. Qual o valor total que Carlos resgatará ao final de 20 meses?

Resolução: Podemos interpretar essa situação como uma PA em que $a_0 = 500$ e $r = 10$, queremos descobrir o a_{20}, logo, pelo termo geral de uma PA, tem-se

$a_{20} = a_0 + 20 \cdot 10 = 500 + 20 \cdot 10 = 700.$

Portanto, Carlos resgatou um total de R$ 700,00.

Exemplo 3.10: João trabalha em uma empresa em que parte do seu salário é fixo e igual ao salário-mínimo de R$ 1.100,00 e a outra parte do seu salário é variável, sendo uma comissão de acordo com o número de vendas efetuadas por João. No primeiro mês de 2021, João não efetuou nenhuma venda, a partir do segundo mês sua comissão aumentou a um valor constante de R$35,00 mensalmente. Qual foi o salário de João no último mês de 2021?

Resolução: Considere as comissões de João

$c_1 = 0, c_2 = 35, c_3 = 70, c_3 = 105$ e assim por diante.

Observe que essa sequência é uma PA de razão $r = 35$, e $c_{12} = c_1 + (12 - 1)35 = 0 + 385 = 385$.

Sendo assim, o salário de João em dezembro foi $R\$\ 1.100 + R\$\ 385 = R\$$ 1.485,00.

Progressão Geométrica

As progressões geométricas (PG) são sequências numéricas $(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots)$ nas quais a razão entre dois termos consecutivos é constante e igual a q. Ou seja, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ para todo $n \in \mathbb{N}$. As progressões geométricas também podem ser definidas como sequências que variam com taxa de crescimento constante. Para isso, segue definição de taxa de crescimento e os Teoremas 7 e 8.

Definição: A *taxa de crescimento* de uma grandeza, que passa do valor a para o valor b, é a razão entre o aumento da grandeza e seu valor inicial, ou seja, $\frac{b-a}{a}$.

Teorema 7: A sequência (a_n) tem taxa de crescimento constante igual a i, se e só se,

$$a_{n+1} = (1+i)a_n \tag{3.6}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

<u>Demonstração:</u> Sabendo que a taxa de crescimento de G_n é i, então

$$i = \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n} \Leftrightarrow ia_n = a_{n+1} - a_n \Leftrightarrow a_{n+1} = a_n + ia_n \Leftrightarrow a_{n+1} = a_n(1+i).$$

Observe que a PG respeita o Teorema 7, e $q = 1 + i$, sendo i a taxa de crescimento dessa sequência. Podemos generalizar o enésimo termo dessa sequência escrevendo-o em função do primeiro termo a_1 e a razão q.

Teorema 8: Se (a_n) é uma progressão geométrica de razão q, então o termo geral dessa PG é dado por

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}. \tag{3.7}$$

<u>Demonstração:</u> Queremos demonstrar que $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$. Faremos a demonstração pelo Princípio de Indução Finita.

• $n = 1$: $a_1 = a_1 \cdot q^0 = a_1$ (trivial)

• $n = 2$: $a_2 = a_1 \cdot q^{(2-1)} \Rightarrow a_2 = a_1 \cdot q$ (Verdadeiro pela definição de PG)

Daí, considere válido para um $n = k$, queremos provar que é válido para $n = k + 1$. Temos, pela definição de PG que $a_{k+1} = a_k \cdot q$, e pela hipótese $a_k = a_1 \cdot q^{(k-1)}$. Logo,

$a_{k+1} = a_1 \cdot q^{(k-1)} \cdot q = a_1 \cdot q^k$.

Então, $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Da mesma forma que na PA, é comum em situações de Matemática Financeira utilizar o valor inicial da sequência como a_0. Sendo assim, a fórmula do termo geral de uma PG seria

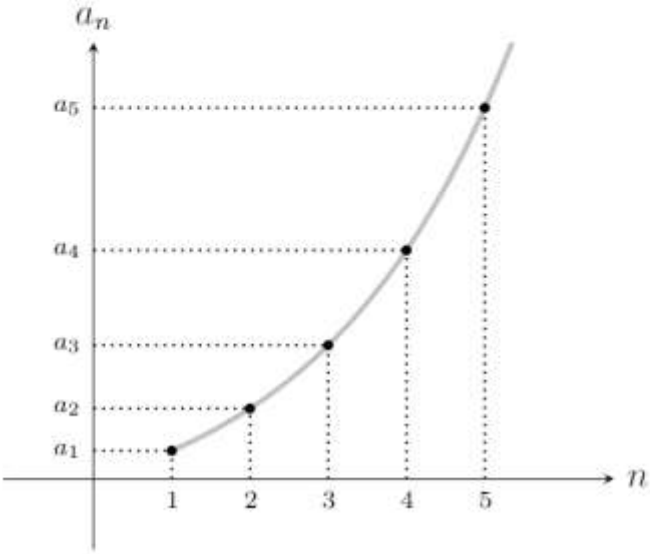
$$a_n = a_0 \cdot q^n. \tag{3.8}$$

A habilidade EM13MAT508 da BNCC (BRASIL, 2018) ressalta que o estudante deve ser capaz de "identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas". Observe que, uma vez que o enésimo termo de uma PG pode ser escrito como $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, isto também representa uma função que associa cada número natural n ao valor de a_n. Tomando $\frac{a_1}{q} = b$ e $q = a$ tem-se

$$a_n = \frac{a_1}{q} \cdot q^n \Rightarrow a_n = b \cdot a^n.$$

Ou seja, uma PG pode ser compreendida como uma restrição da função do tipo exponencial no conjunto dos naturais. O gráfico de uma PG crescente, ou seja $q > 1$, ilustrado na Figura 7, é formado pela sequência de pontos, com abscissas naturais, pertencentes a curva exponencial.

Figura 7 - Gráfico de uma PG



Fonte: Morgado e Carvalho, 2015, adaptado.

Teorema 9: A soma S_n dos n primeiros termos de uma PG de razão $q \neq 1$ é dada por

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}. \quad (3.9)$$

<u>Demonstração:</u>

$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n.$

Multiplicando essa soma por q obtém-se

$S_n \cdot q = a_1 \cdot q + a_2 \cdot q + \cdots + a_{n-1} \cdot q + a_n \cdot q = a_2 + a_3 + \cdots + a_n + a_{n+1}$.

Subtraindo essas duas igualdades, tem-se

$S_n - S_n \cdot q = a_1 - a_{n+1} = a_1 - a_1 \cdot q^n \Rightarrow S_n(1-q) = a_1(1-q^n) \Rightarrow S_n = a_1 \frac{(1-q^n)}{1-q}$.

Teorema 10: A soma dos infinitos termos de uma PG em que a razão $|q| < 1$ é dada por

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-q}. \qquad (3.10)$$

<u>Demonstração:</u> Tomemos a equação 3.9, resultado do Teorema 9, a soma dos infinitos termos de uma PG será dada pelo $\lim S_n$ quando $n \to \infty$.

$$\lim_{n\to\infty} a_1 \frac{(1-q^n)}{1-q} = a_1 \frac{(1-0)}{1-q} = \frac{a_1}{1-q}.$$

Compreendido o que são as Progressões Geométricas seguem dois exemplos de como esse conteúdo pode ser aplicado em um contexto de Matemática Financeira.

Exemplo 3.11: Um investimento rende 0,7% ao mês. Considerando que um valor inicial R$ 1.800,00 foi aplicado nessas condições, qual o valor atualizado desse investimento daqui 5 meses?

<u>Resolução:</u> Podemos interpretar essa situação como uma PG em que $q = 1 + 0{,}007 = 1{,}007$ e $a_1 = 1.800$, queremos descobrir o a_6, logo, pelo termo geral de uma PG, tem-se

$a_6 = a_1 \cdot 1{,}007^{6-1} = 1.800 \cdot 1{,}007^5 \approx 1.863{,}89$.

Portanto, o valor atualizado desse investimento é R$ 1.863,89.

Exemplo 3.12: Julia aplica todo mês R$200,00 reais em um investimento, que rende 0,5% ao mês. Sendo seu primeiro depósito em janeiro de 2021 e fez o último depósito em abril de 2022, qual o valor final que Júlia resgatará exatamente após esses 15 meses de aplicação?

<u>Resolução:</u> O montante que Julia terá após 15 meses pode ser calculado efetuando a soma a seguir

$200 + 200 \cdot (1{,}005) + 200 \cdot (1{,}005)^2 + \cdots + 200 \cdot (1{,}005)^{15}$.

Essa situação pode ser resolvida utilizando a soma de n termos de uma PG, em que $a_1 = 200$, $q = 1{,}005$ e $n = 16$, logo, pela equação 3.9 temos

$$S_{16} = 200 \cdot \frac{(1 - 1{,}005^{16})}{1 - 1{,}005} \approx 3.322{,}85.$$

Ao final de 15 meses, Julia retirará aproximadamente R$ 3.322,85.

Compreendido esses conceitos matemáticos, como porcentagem, funções e progressões, passa-se apresentar a Matemática Financeira propriamente dita, iniciando os estudos pelos sistemas de capitalização.

3.2 Sistemas de capitalização

De acordo com Assaf (2002), podemos definir a Matemática Financeira como o estudo do valor do dinheiro ao longo do tempo, tendo como objetivo efetuar análises e comparações dos fluxos de entrada e saída de dinheiro de caixa verificados em diferentes momentos. Segundo Morgado, Wagner e Zani (2015), a operação básica da Matemática Financeira é o empréstimo. Analisemos as duas situações seguintes:

1. Um comerciante vende de maneira parcelada, ou seja, a prazo, um produto de sua loja, e por isso decide incidir um determinado juro sobre o valor ainda não pago.
2. Um investidor decide investir parte de seu dinheiro em uma aplicação financeira em um determinado banco, dessa forma, o banco paga juros para o investidor.

Em ambas as situações há

> Alguém que dispõe de um capital C (chamado de capital principal ou inicial), empresta-o a outrem por um certo período de tempo. Após esse período ele recebe seu capital C de volta, acrescido de uma remuneração J pelo empréstimo. Essa remuneração é chamada de juro. A soma $C + J$ é chamada de montante e será representada por M. A razão $i = J/C$, que é a taxa de crescimento do capital, será sempre referida ao período da operação e chamada de taxa de juros. (MORGADO; WAGNER; ZANI, 2015, p. 53)

Sendo assim, podemos afirmar que o juro, J, representa um "aluguel sobre o dinheiro emprestado", ou seja, uma compensação em dinheiro que se paga ou recebe pelo dinheiro emprestado. Já a taxa de juros, i, é o coeficiente percentual que determina o valor do juro, e está sempre atrelada a uma unidade de tempo, e o montante, M, é o capital inicial mais o valor acumulado de juros.

O processo que incorpora os juros ao capital inicial é chamado de sistema de capitalização e, segundo Assaf (2002) podem ser identificados dois regimes de capitalização: o contínuo e o descontínuo.

> A *capitalização contínua* é um regime que se processa em intervalos de tempos bastante reduzidos – caracteristicamente em intervalos de tempo infinitesimal – promovendo grande frequência de capitalização. A capitalização continua, na prática, pode ser entendida em todo fluxo monetário distribuído ao longo do tempo e não somente num único instante. Por exemplo, o faturamento de um

> supermercado, a formação do custo de fabricação no processamento fabril, a formação de depreciação de um equipamento etc. são capitalizações que se formam continuamente, e não somente ao final de um único período (mês, ano). [...]
> Na *capitalização descontínua* os juros são formados ao final de cada período de capitalização. A caderneta de poupança que paga juros unicamente ao final do período a que se refere sua taxa de juros (mês) é um exemplo de capitalização descontínua. Os rendimentos, nesse caso, passam a ocorrer descontinuamente, somente um único momento do prazo da taxa (final do mês) e não distribuidamente pelo mês. (ASSAF, 2002, p. 22)

A capitalização contínua pode ser entendida como uma função de domínio real enquanto a capitalização descontínua seria uma função de domínio discreto, ou seja, uma sequência. A capitalização descontínua pode ser classificada em dois tipos, uma relacionado ao regime dos juros simples (capitalização linear), e outra relacionada ao regime dos juros compostos (capitalização exponencial). A seguir, serão apresentados os juros simples e, em seguida, apresentado os juros compostos.

3.2.1 Juros Simples

No regime de capitalização simples, os juros incidem apenas sobre o capital inicial da operação, não registrando juros sobre o saldo dos juros acumulados.

Consideremos a seguinte situação: um capital inicial de R$10.000,00 foi aplicado durante 5 anos, em um sistema de juros simples com uma taxa de 10% ao ano. A Tabela 2 representa a situação apresentada.

Tabela 2 - Exemplo regime de capitalização simples

Ano	Saldo inicial do ano	Juros	Saldo final do ano	Juros totais
0	R$10.000	-	R$10.000	R$0
1	R$10.000	R$1.000	R$11.000	R$1.000
2	R$11.000	R$1.000	R$12.000	R$2.000
3	R$12.000	R$1.000	R$13.000	R$3.000
4	R$13.000	R$1.000	R$14.000	R$4.000
5	R$14.000	R$1.000	R$15.000	R$5.000

Fonte: a autora, 2021.

Observamos que, de acordo com a definição, os juros incidem apenas sobre o capital inicial, sendo seu valor constante e igual a $0{,}10 \times R\$10.000 = R\$1.000$. Podemos concluir que o saldo ao final de cada ano em relação ao tempo comporta-se como uma função afim de domínio discreto, ou seja, uma progressão aritmética, uma vez que os juros totais crescem de maneira linear ao longo do tempo.

Vejamos agora uma situação geral: um capital inicial *C*, aplicado durante um tempo *t*, em um sistema de juros simples com uma taxa *i*. Observe a Tabela 3 que representa essa situação.

Considerando j o valor dos juros em cada unidade de tempo, podemos determiná-lo por meio da equação $j = Ci$, uma vez que pela definição de juros simples, os juros incidem apenas sobre o capital inicial.

Tabela 3 - Regime de capitalização simples

Tempo	Saldo inicial do ano	Juros (j)	Montante	Juros total
0	C	-	$\boldsymbol{C}$	-
1	C	$C \cdot i$	$C + C \cdot i = \boldsymbol{C(1+i)}$	$C \cdot i$
2	$C(1+i)$	$C \cdot i$	$C(1+i) + C \cdot i = \boldsymbol{C(1+2i)}$	$2C \cdot i$
3	$C(1+2i)$	$C \cdot i$	$C(1+2i) + C \cdot i = \boldsymbol{C(1+3i)}$	$3C \cdot i$
4	$C(1+3i)$	$C \cdot i$	$C(1+3i) + C \cdot i = \boldsymbol{C(1+4i)}$	$4C \cdot i$
5	$C(1+4i)$	$C \cdot i$	$C(1+3i) + C \cdot i = \boldsymbol{C(1+5i)}$	$5C \cdot i$
...				

Fonte: a autora, 2021.

Teorema 11: Os juros totais *J* e o montante *M* de uma capitalização simples de capital inicial *C* e taxa i podem ser calculados como

$$J = Cit \tag{3.11}$$

E

$$M = C(1 + ti). \tag{3.12}$$

<u>Demonstração:</u> Como o regime de juros simples pode ser comparado a uma PA, podemos provar utilizando o termo geral de uma PA. O primeiro termo da sequência, que consideraremos como a_0 para essa situação é o C, o a_n é o montante, sendo n o tempo t , enquanto a razão r é Ci. Então,

$a_n = a_0 + nr \Rightarrow M = C + t \cdot Ci = C(1 + ti)$.

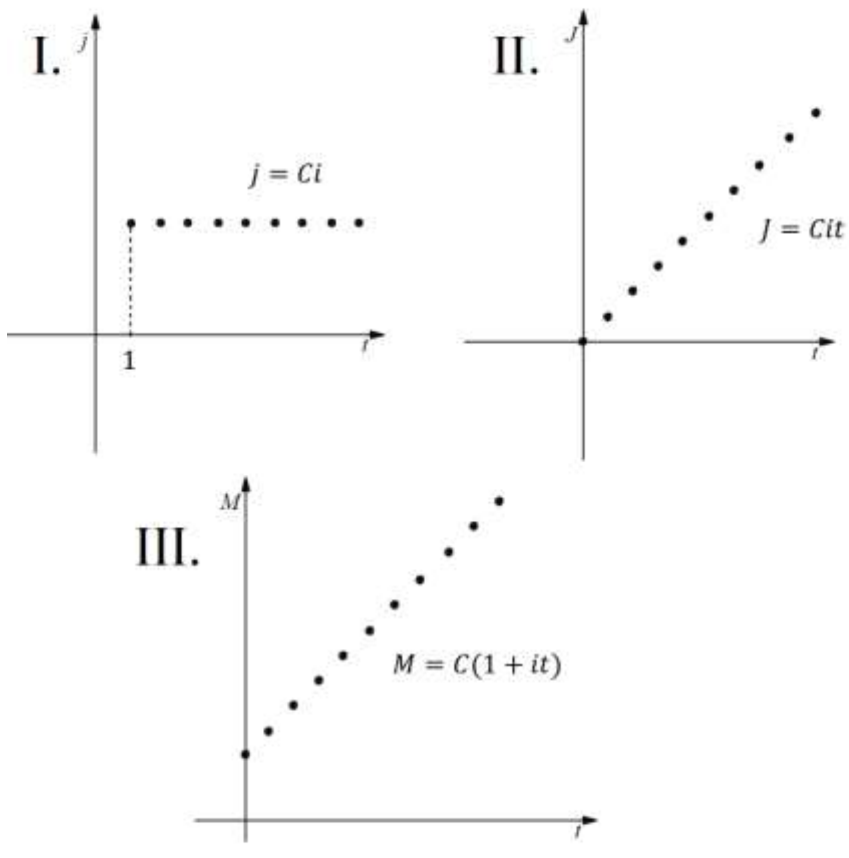
Daí, como $M = C + J$, utilizando o resultado anterior temos que

$C + Cit = C + J \Rightarrow Cit = J$.

A Figura 8 apresenta os diferentes gráficos que podem ser obtidos em uma situação em regime de juros simples. Observe que em todos eles o gráfico é pontilhado, uma vez que configura uma situação de capitalização descontínua. O gráfico I apresenta os juros em cada unidade de tempo j em função do tempo t. O gráfico II apresenta os juros total J em função do tempo t. O gráfico III apresenta a relação do montante M em função do tempo t. Em todos os casos, se a função fosse contínua, teríamos:

• No gráfico I uma função constante, já que j não depende de t e sim apenas de C e i.
• No gráfico II uma função linear, já que seria uma reta que passa pela origem.
• No gráfico III uma função afim que passa pelo ponto $(0, C)$, já que é uma reta inclinada.

Figura 8 - Gráficos Juros Simples



Fonte: a autora, 2021.

A seguir, apresentamos dois exemplos no contexto de Matemática Financeira utilizando o regime de capitalização simples.

Exemplo 3.13: Um comerciante negociou um empréstimo de R$ 5.000,00, pagando uma taxa 2% ao mês no regime de juros simples. Dessa forma, qual o valor pago ao final de um ano?

Resolução: Se tratando do regime de capitalização simples, temos que

$M = C(1 + ni)$

$M = 5.000(1 + 12 \cdot 0{,}02) = 6.200.$

Logo, o comerciante terá de pagar R$ 6.200,00.

Exemplo 3.14: Renato negociou uma mercadoria de R$ 6.000,00 a uma taxa de juros simples de 8,4% ao ano. Sabendo que Renato pagou R$ 420,00 de juros, quanto tempo após comprar a mercadoria ele finalizou o pagamento?

Resolução: Se tratando do regime de capitalização simples, temos que

$J = Cit$

$420 = 6.000 \cdot 0{,}084 \cdot t \Rightarrow t = \frac{5}{6}.$

Como a taxa foi dada em anos, o tempo obtido também está em anos, ou seja, $\frac{5}{6}$ do ano, que equivale a 10 meses.

3.2.2 Juros Compostos

No regime de capitalização composta, os juros incidem sobre o capital atualizado, ou seja, o juro composto não incide apenas sobre o capital inicial, mas também aos juros já incorporados. Os juros compostos são aqueles gerados por juros acumulados ao final de cada período e incorporados ao montante que já se tem, formando um novo montante sobre o qual se calcula o juro do período seguinte. Por esse motivo, os juros compostos também são conhecidos como “juros sobre juros”.

Considere a seguinte situação: um capital inicial de R$10.000,00 foi aplicado durante 5 anos, em um sistema de juros compostos com uma taxa de 10% ao ano. A Tabela 4 representa a situação apresentada.

De acordo com a definição, a partir do segundo ano, os juros não incidem apenas sobre o capital inicial, mas sim sobre o saldo final do ano anterior, que se incorpora ao capital inicial e aos juros dos anos anteriores. Para calcular o saldo final de cada ano, podemos multiplicar o saldo inicial do ano pelo fator de aumento dos juros, ou seja, $(1 + i) = (1 + 0{,}1) = 1{,}1$. Assim,

- Saldo ao final do 1º ano: $1{,}1 \cdot R\$10.000 = R\$11.000$
- Saldo ao final do 2º ano: $1{,}1 \cdot R\$11.000 = R\$12.100$

• Saldo ao final do 3º ano: $1{,}1 \cdot R\$12.100 = R\$13.310$

...

Daí, tem-se que o crescimento do capital inicial segue o comportamento de uma função exponencial de domínio discreto, ou seja, uma progressão geométrica de razão $q = (1+i)$.

Tabela 4 - Exemplo regime de capitalização compostos

Ano	Saldo inicial do ano	Juros	Saldo final do ano	Juros totais
0	R$10.000	-	R$10.000,00	R$0,00
1	R$10.000	R$1.000,00	R$11.000,00	R$1.000,00
2	R$11.000	R$1.100,00	R$12.100,00	R$2.100,00
3	R$12.100	R$1.210,00	R$13.310,00	R$3.310,00
4	R$13.310	R$1.331,00	R$14.641,00	R$4.641,00
5	R$14.641	R$1.464,10	R$16.105,10	R$6.105,10

Fonte: a autora, 2021.

Vejamos agora uma situação geral apresentado na Tabela 5: um capital inicial *C*, aplicado durante um tempo *t*, em um sistema de juros compostos de taxa *i*.

Tabela 5 - Regime da capitalização composta

Tempo	Saldo inicial do ano	Juros no ano	Montante
0	C	-	$\boldsymbol{C}$
1	C	$i \cdot C$	$C + C \cdot i = \boldsymbol{C(1+i)}$
2	$C(1+i)$	$i \cdot C(1+i)$	$C(1+i) + i \cdot C(1+i) = \boldsymbol{C(1+i)^2}$
3	$C(1+i)^2$	$i \cdot C(1+i)^2$	$C(1+i)^2 + i \cdot C(1+i)^2 = \boldsymbol{C(1+i)^3}$
4	$C(1+i)^3$	$i \cdot C(1+i)^3$	$C(1+i)^3 + i \cdot C(1+i)^3 = \boldsymbol{C(1+i)^4}$
5	$C(1+i)^4$	$i \cdot C(1+i)^4$	$C(1+i)^4 + i \cdot C(1+i)^4 = \boldsymbol{C(1+i)^5}$

Fonte: a autora, 2021.

Teorema 12: No regime de juros compostos de taxa i, o capital inicial C, após um período t, transforma-se em um montante igual a

$$M = C(1+i)^t. \tag{3.13}$$

<u>Demonstração:</u>

Para cada t, seja C_t o montante após t períodos. Temos que $C_{t+1} = C_t + iC_t = (1+i)C_t$, daí, pela equação 3.6, podemos concluir que C_t é uma PG de razão $(1+i)$. Pelo termo geral de uma PG, temos que $C_t = C_0(1+i)^t \Rightarrow M = C(1+i)^t$.

Teorema 13: No regime de capitalização composta, o total de juros obtidos por um capital inicial C, a uma taxa i, ao fim de t períodos a que se refere a taxa é dado por

$$J = C[(1+i)^t - 1]. \qquad (3.14)$$

<u>Demonstração:</u>

Uma vez que $M = C + J$ e utilizando a equação 3.12, temos

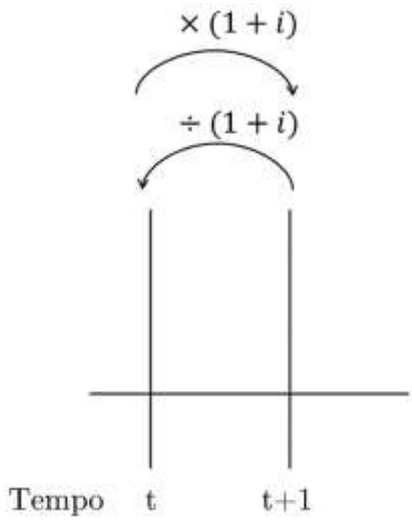
$J + C = C(1+i)^t \Rightarrow J = C(1+i)^t - C \Rightarrow J = C[(1+i)^t - 1]$.

De acordo com Morgado, Wagner e Zani (2015), a fórmula $M = C(1+i)^t$ é considerada como a fórmula fundamental da equivalência entre capitais:

• Para obter o valor futuro de um capital, basta multiplicar o valor atual por $(1+i)^t$.

• Para obter o valor atual, basta dividir o capital futuro por $(1+i)^t$.

Figura 9 - Equivalência de capitais



Fonte: a autora, 2021.

A Figura 9 ilustra a equivalência entre capitais no regime de juros compostos. A seguir apresentamos alguns exemplos tendo-se como base o sistema de capitalização composta.

Exemplo 3.15: Júlia pegou um empréstimo de R$ 500,00 a juros compostos de 12% ao mês. Qual a dívida que Júlia acumulou após 3 meses?

<u>Resolução:</u> $M = C(1+i)^t \Rightarrow M = 500(1+0{,}12)^3 \Rightarrow M \approx 702{,}46.$

Logo, Júlia acumulou uma dívida de aproximadamente R$702,46.

Exemplo 3.16: (Calculadora do Cidadão) Um cidadão pretende adquirir um bem daqui a 7 meses no valor de R$2.500,00. Quanto terá que depositar hoje, sabendo que o rendimento de determinada aplicação é de 1,5% ao mês?

<u>Resolução:</u> $M = C(1+i)^t \Rightarrow 2.500 = C(1+0{,}015)^7 \Rightarrow C = \frac{2.500}{1{,}015^7} \approx 2.252{,}57.$

Dessa forma, o cidadão deve depositar no mínimo R$ 2.252,57 para obter o capital futuro desejado.

Exemplo 3.17: Natália tomou um empréstimo de R$300,00 a juros compostos mensais de 5%. Dois meses depois, Natália pagou R$150,00 e, um mês após esse pagamento, liquidou sua dívida. Qual o valor desse último pagamento?

<u>Resolução:</u>

Após dois meses, Natália terá acumulado uma dívida de $M = 300 \cdot (1{,}05)^2 = 330{,}75.$ No entanto, tendo pagado R$150,00, o saldo devedor passa a ser R$180,75. Daí, após um mês será $M = 180{,}75 \cdot (1{,}05) \approx 189{,}79.$

Logo, o valor do último pagamento feito por Natália é de aproximadamente R189,79.

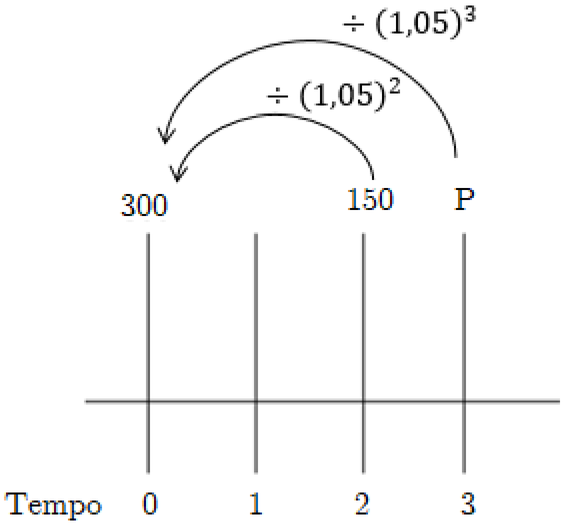
Há outras formas interessantes de resolver esse problema. Consideremos que P seja o valor do último pagamento feito pela Natália. Sabemos que daqui 2 meses será pago 150 reais, no entanto, hoje, qual o valor equivalente desses 150 reais? Trabalhando com a equivalência de capitais, temos que 150 reais daqui dois meses equivalem a aproximadamente 136,05 reais atualmente $\left(\frac{150}{1{,}05^2} \approx 136{,}05\right)$. Dessa forma, ainda restarão $300 - 136{,}05 = 163{,}95$ reais a serem pagos. No entanto esses só serão quitados daqui a 3 meses, e, portanto, deverão ser pagos $163{,}65 \cdot (1{,}05)^3 \approx 189{,}79$ reais.

Dessa forma, podemos padronizar que para se comparar valores é sempre necessário tratá-los em um mesmo período. Sendo assim, optamos em trabalhar com os capitais equivalentes no tempo zero. A Figura 10 ilustra a equivalência de capitais na situação apresentada.

Daí igualando os valores no tempo zero, tem-se

$$300 = \frac{150}{1{,}05^2} + \frac{P}{1{,}05^3} \Rightarrow P \approx 189{,}79\, reais.$$

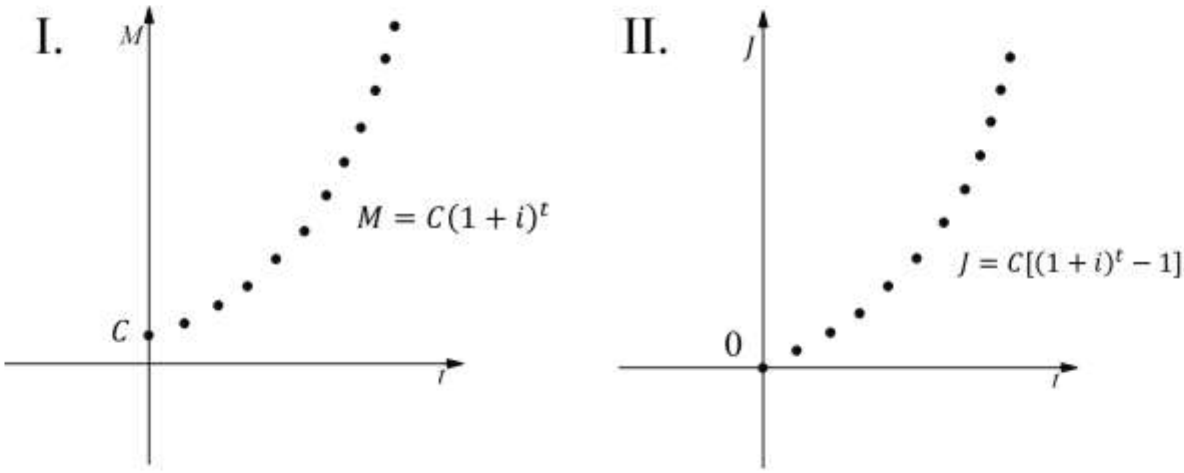
Figura 10 - Equivalência de Capitais Exemplo 3.17



Fonte: a autora, 2021.

A Figura 11 representa os diferentes gráficos que podem ser obtidos em regime de juros compostos. Observemos que em todos eles o gráfico é pontilhado, uma vez que configura uma situação de capitalização descontínua. O gráfico I representa a relação do montante M em função do tempo t e, se tivesse domínio real, representaria uma função do tipo exponencial. O gráfico II representa a relação dos juros J produzido em função do tempo t e, se também tivesse domínio real, representaria uma função do tipo exponencial transladada C verticalmente para baixo.

Figura 11 - Gráficos Juros Compostos



Fonte: a autora, 2021.

3.2.3 Taxas proporcionais e taxas equivalentes

Como já apresentado antes, a taxa de juros é a taxa percentual que determina o valor do juro. As taxas de juros estão sempre associadas a um prazo, por exemplo, 24% ao ano (a.a.), 5% ao mês (a.m.), 11% ao semestre (a.s.), entre outros.

Toda operação envolve dois prazos, sendo um deles referente à taxa de juros i e o outro, de capitalização t. Em algumas situações é necessário fazermos algumas mudanças na unidade desses prazos e, para isso, é necessário compreendermos os conceitos de taxas proporcionais e taxas equivalentes.

Definição 4: Considere uma taxa i_1 e i_2 e seus respectivos prazos n_1 e n_2, dados em uma mesma unidade de tempo. Dizemos que essas taxas são *proporcionais* quando i_1, n_1, i_2 e n_2 formam, nessa ordem, uma proporção, ou seja, vale a seguinte relação $\frac{i_1}{n_1} = \frac{i_2}{n_2}$.

Sendo assim, as taxas 24% ao ano, 2% ao mês e 12% ao semestre são proporcionais uma vez que $\frac{24\%}{12\ meses} = \frac{2\%}{1\ meses} = \frac{12\%}{6\ meses}$.

Definição 5: Duas taxas são consideradas *equivalentes* quando aplicadas a um mesmo capital e pelo mesmo intervalo de tempo, produzem o mesmo rendimento.

No regime de juros simples, as taxas equivalentes são também proporcionais. Já no regime de juros compostos, taxas equivalentes não são proporcionais, de forma que para se determinar as taxas equivalentes utiliza-se a equação 3.15 a seguir.

Teorema 14: Em um sistema de capitalização composta, a taxa de juros i, relativa a um determinado período de tempo, e a taxa de juros I, relativa a n períodos de tempo, são taxas equivalentes, se e só se

$$1 + I = (1 + i)^n \tag{3.15}$$

<u>Demonstração:</u>

Se as taxas são equivalentes, então pela definição $C(1 + I) = C(1 + i)^n \Rightarrow 1 + I = (1 + i)^n$. Se $1 + I = (1 + i)^n \Rightarrow C(1 + I) = C(1 + i)^n$ e, portanto, ambas as taxas aplicadas a um mesmo capital produzem um mesmo rendimento. Logo, pela definição, as taxas são equivalentes.

Sendo assim, é válida a seguinte relação

$$(1 + i_{anual}) = (1 + i_{semestral})^2 = (1 + i_{trimestral})^4 = (1 + i_{bimestral})^6 = (1 + i_{mensal})^{12}.$$

Exemplo 3.18: Um comerciante negociou um empréstimo de R$ 5.000,00, pagando uma taxa de 2% ao mês no regime de juros simples. Dessa forma, qual o valor pago ao final de um ano?

Observação: Esse exemplo já foi resolvido na sessão sobre juros simples, na qual foi feita uma mudança na unidade do tempo t, que estava em ano e passamos para meses (1 ano = 12 meses). Agora, iremos resolver fazendo uma mudança na unidade da taxa para que ambos os prazos fiquem na mesma unidade.

Resolução: Como se trata de um sistema de capitalização simples, as taxas equivalentes são também proporcionais. Logo

$\frac{2\%}{1\ mês} = \frac{I}{12\ meses} \Rightarrow I = 24\%\ ao\ ano.$

Daí, segue que $M = C(1 + it) \Rightarrow M = 5.000(1 + 0{,}24 \cdot 1) \Rightarrow M = 6.200$ reais.

Exemplo 3.19: Seja 4% a.m. uma taxa de juros compostos. A taxa anual de juros equivalente é chamada de I tal que $1 + I = (1 + 0{,}04)^{12} \approx 1{,}60$. Daí tem-se que I é aproximadamente 60% ao ano.

Carvalho e Morgado (2015) apontam que

> Um (péssimo) hábito em Matemática Financeira é o de anunciar taxas proporcionais como se fossem equivalentes. Uma frase como “48% ao ano, com capitalização mensal” significa que a taxa usada na operação não é a taxa de 48% anunciada e sim a taxa mensal que lhe é proporcional. Portanto, a tradução da expressão “48% ao ano, com capitalização mensal” é “4% ao mês”. As pessoas menos educadas matematicamente podem pensar que os juros sejam realmente 48% ao ano, mas isso não é verdade. Como vimos no exemplo acima, os juros são de 60% ao ano. (p. 91)

Exemplo 3.20: Renato financiou um apartamento em uma imobiliária, em que deveria pagar juros de 9% a.a. com capitalização mensal. Qual a taxa anual de juros à qual está de fato sendo cobrada de Renato?

Resolução: A taxa proporcional a 9% a.a. é 0,75% a.m.

A taxa anual I equivalente a 0,75% a.m. é tal que $1 + I = (1 + 0{,}0075)^{12} \Rightarrow 1 + I \approx 1{,}094$, portanto, I é aproximadamente 9,4%.

No exemplo acima, a taxa de 9% a.a. é chamada de *taxa nominal*, que é a taxa apresentada quando o prazo dos juros não coincide com o prazo da capitalização. A taxa de 0,75% a.m. é a taxa proporcional, e a taxa de 9,4% a.a. é chamada de *taxa efetiva*.

> Uma taxa nominal transforma-se em taxa efetiva quando convertida em seu período de capitalização. A taxa nominal serve somente como referência, pois não é a taxa realmente paga ou recebida. A taxa efetiva é a efetivamente paga ou recebida em uma operação financeira, razão pela qual somente esta última deve ser utilizada nos cálculos financeiros. (CAMARGOS, 2013, s/p)

Compreendido os dois regimes de capitalização e suas respectivas características, na sessão a seguir apresenta-se uma comparação entre esses dois regimes.

3.2.4 Comparação entre juros simples e compostos

Consideremos uma aplicação de R$10.000,00 com uma taxa de 10% ao ano, tanto no sistema de capitalização simples, apresentada pela Tabela 2, quanto no sistema de capitalização composta, apresentada pela Tabela 4. A Tabela 6 compara o valor final obtido ao final de cada ano, nos dois sistemas de capitalização, durante 5 anos.

Tabela 6 – Comparação entre montantes no regime Simples e Composto ($t \geq 1$)

Tempo (ano)	Montante (Juros Simples)	Montante (Juros Compostos)
0	R$ 10.000,00	R$ 10.000,00
1	R$ 11.000,00	R$ 11.000,00
2	R$ 12.000,00	R$ 12.100,00
3	R$ 13.000,00	R$ 13.310,00
4	R$ 14.000,00	R$ 14.641,00
5	R$ 15.000,00	R$ 16.105,10

Fonte: a autora, 2021.

Observemos que no tempo $t = 1$, os montantes produzidos nos dois sistemas de capitalização são iguais, e para períodos maiores que $t = 1$, o montante produzido pelos juros compostos é sempre superior ao montante produzido pelos juros simples. Isso se dá devido aos juros compostos serem sempre capitalizados considerando os juros acumulado anteriormente.

De forma discreta, podemos demonstrar esse comportamento por meio das equações 3.9 e 3.8 utilizando o Princípio da Indução Finita.

Teorema 15: A desigualdade $C(1+i)^t \geq C(1+ti)$ vale para todo $t \geq 1$ com $t \in \mathbb{N}$, sendo i e C constantes positivas.

Demonstração: Verificando inicialmente para $t = 1$, tem-se que a desigualdade é trivialmente verdadeira. Agora, supondo que a desigualdade é verdadeira para certo valor $t = n$, queremos provar que a desigualdade também é verdadeira para $t = n + 1$. Daí, multiplicando ambos os lados da desigualdade por $(1 + i)$ tem-se

$(1 + i)(1 + i)^n \geq (1 + i)(1 + ni) \Rightarrow (1 + i)^{n+1} \geq 1 + ni + i + ni^2 \geq 1 + (n + 1)i.$

Logo a desigualdade é válida para todo $t \geq 1$ com $t \in \mathbb{N}$.

Agora, consideremos a mesma situação, uma aplicação de R$10.000,00 com uma taxa de 10% ao ano, mas com capitalização mensal. A Tabela 7 compara os montantes produzidos, tanto no sistema de capitalização simples quanto no sistema de capitalização composta, para $0 < t \leq 1$. Nesse caso, como a taxa foi dada ao ano, trabalharemos com o tempo como frações do ano.

Tabela 7 - Comparação entre montantes no regime Simples e Composto ($0 < t \leq 1$)

Tempo (mês)	Tempo (ano)	Montante (Juros Simples)	Montante (Juros Compostos)
0	0	R$ 10.000,00	R$ 10.000,00
1	$\frac{1}{12}$	R$ 10.083,33	R$ 10.079,74
2	$\frac{1}{6}$	R$ 10.166,67	R$ 10.160,12
3	$\frac{1}{4}$	R$ 10.250,00	R$ 10.241,14
⋯	⋯	⋯	⋯
11	$\frac{11}{12}$	R$ 10.916,67	R$ 10.912,98
12	1	R$ 11.000,00	R$ 11.000,00

Fonte: a autora, 2021.

Como podemos observar, o montante produzido no regime de capitalização simples é maior que no regime de capitalização composta, se igualando apenas no tempo igual a 1 ano. Para demonstrar essa diferença de rendimento até o primeiro período nos dois modelos de juros, podemos utilizar a desigualdade entre a média aritmética ponderada e a média geométrica ponderada.

Teorema 16: A desigualdade $C(1+i)^t \leq C(1+ti)$ vale para todo $0 < t \leq 1$ sendo i e C constantes positivas.

<u>Demonstração:</u> Considere as constantes reais não negativas a e b, a desigualdade das médias ponderadas para 1 e $(1+i)$ com pesos a e b, respectivamente, é

$$\frac{a \cdot 1 + b \cdot (1+i)}{a+b} \geq \sqrt[a+b]{1^a \cdot (1+i)^b}$$

$$\Rightarrow \frac{a+b+b \cdot i}{a+b} \geq \sqrt[a+b]{(1+i)^b}$$

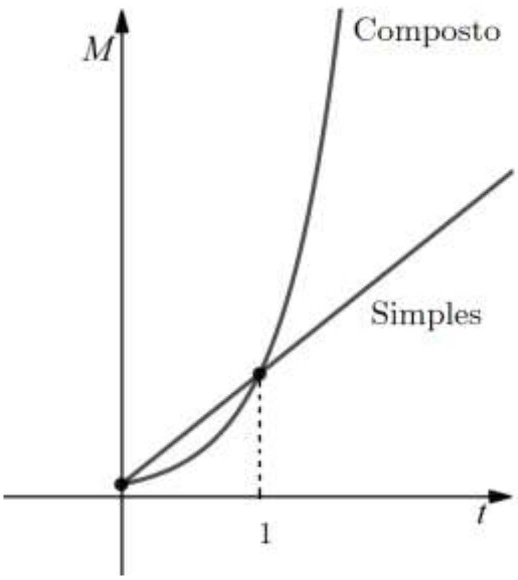
$$\Rightarrow 1 + \frac{b}{a+b} \cdot i \geq (1+i)^{\frac{b}{a+b}}.$$

Considere $t = \frac{b}{a+b}$, como $0 < \frac{b}{a+b} \leq 1 \Rightarrow 0 < t \leq 1$, daí

$1 + ti \geq (1+i)^t \Rightarrow C(1+ti) \geq C(1+i)^t$.

Considerando as capitalizações de maneira contínua, podemos comparar os gráficos do Montante M pelo tempo t, produzidos em ambas os sistemas de capitalização. A Figura 12 abaixo apresenta esses gráficos, e é possível perceber que no período entre $0 < t \leq 1$ o montante dos juros compostos é menor que o montante dos juros simples, enquanto para períodos maiores $t = 1$, o contrário ocorre.

Figura 12 - Gráfico comparativo do montante em capitalização simples e composta



Fonte: a autora, 2021.

Dessa forma, Assaf (2002) aponta que o uso da capitalização simples se restringe principalmente às operações praticadas no âmbito do curto prazo, em que o tempo se encontra entre zero e um. O autor também ressalta que

> muitas taxas praticadas no mercado financeiro (nacional e internacional) estão referenciadas em juros simples, porém a formação dos montantes das operações processa-se exponencialmente (juros compostos). Por exemplo, a Caderneta de Poupança paga tradicionalmente uma taxa de 6% ao *ano* para seus depositantes, creditando todo *mês* o rendimento proporcional de 0,5%. A taxa referenciada para esta operação é linear, porém os rendimentos são capitalizados segundo o critério de juros compostos, ocorrendo ao longo dos meses juros sobre juros. (ASSAF, 2002, p. 21)

Como apresentado, a taxa de 6% a.a. seria a taxa nominal enquanto 0,5% a.m. é a taxa proporcional, e a taxa efetiva já seria considerando a equivalência de taxas no sistema de juros compostos. Morgado, Wagner e Zani (2015) afirmam que

> Na vida real, juros simples são raramente usados. O motivo para isso é o que um humorista já definiu como sendo a "regra de ouro" da Matemática Financeira – e também da vida: "Na vida, quem tem o ouro é quem faz as regras". O gráfico mostra que os montantes a juros compostos são maiores que os montantes a juros simples. É, portanto, de interesse dos detentores do capital que os juros sejam compostos. A exceção ocorre se o prazo for menor que a unidade de tempo, neste caso, juros simples dariam maior montante. Esta é a única situação da vida real – que ocorre tipicamente em juros de mora, isto é, nos juros que são cobrados por pequenos atrasos em pagamentos – em que juros simples são utilizados. (p. 67)

No entanto, o motivo pelo qual o juro composto é mais utilizado não é somente para favorecer os mais ricos, pois esse motivo é simplista e não considera todas as situações. Imaginemos, uma situação em que um cidadão está devendo R$ 15.000,00 e a cada mês pagará 0,2% de juros simples. Após um mês que contraiu a dívida, esse cidadão consegue quitar R$ 5.000,00. Seria justo que no mês seguinte fosse lhe cobrado juros sobre o valor inicial, R$ 15.000,00, mesmo que já quitado uma parte da dívida?

Assaf (2002) e Camargos (2013) afirmam que o juro simples, devido a suas restrições técnicas em relação as equivalências de capitais, tem aplicações práticas bem limitadas, sendo raras as operações financeiras e comerciais que utilizam esse sistema. Dessa forma o juro composto, por envolver a capitalização exponencial dos juros, é o regime reconhecidamente adotado por todo o mercado financeiro e de capitais.

Compreendido todos os conceitos necessários à matemática financeira, consideramos importante apresentar a Calculadora do Cidadão, que é uma ferramenta muito interessante para o cidadão, e por consequência para o professor, que pode explorá-la em sala de aula juntamente aos estudantes.

3.3 Calculadora do Cidadão

A Calculadora do Cidadão (CdC) é uma ferramenta criada em 1999 pelo Banco Central e disponibilizada em seu sítio eletrônico[6] e por meio de aplicativo – este disponível a partir de 2012 –, cuja finalidade é fazer simulações de diferentes operações financeiras (BANCO CENTRAL, 2021).

Um dos objetivos da Calculadora é promover a Educação Financeira auxiliando o cidadão em suas necessidades cotidianas, de maneira que os resultados das funcionalidades da calculadora possam servir de referência para situações reais do cotidiano do consumidor. A Calculadora do Cidadão traz quatro funções principais, quais sejam:

- Aplicação com Depósitos Regulares;
- Valor Futuro de um Capital;
- Financiamento com Prestações Fixas;
- Correção de Valores.

Figura 13 - Funcionalidades Calculadora do Cidadão

Fonte: Calculadora do Cidadão, 2021.

A Figura 13 representa a tela inicial da ferramenta, que explica essas quatro funções principais. Vamos explorar um pouco essas funcionalidades, com exceção da *Financiamento*

[6] Disponível em: https://www.bcb.gov.br/acessoinformacao/calculadoradocidadao.

com prestações fixas, uma vez que não é o foco desse trabalho discutir questões de financiamento.

A funcionalidade de *Valor futuro de capital* auxilia o cidadão a calcular por exemplo qual o montante ao final de uma certa aplicação financeira, considerando os juros compostos. Ao abrir essa funcionalidade, são dados quatro exemplos de como utilizar a ferramenta. Em cada situação desses exemplos, uma das lacunas explicitadas na Figura 14 deve ser deixada em branco sendo assim possível calcular o resultado esperado.

Figura 14 - Metodologia Valor futuro de um capital (CdC)

Fonte: Calculadora do Cidadão, 2021.

A Calculadora do Cidadão ainda explicita sua metodologia, ou seja, quais os métodos utilizados para desenvolver os cálculos e, no caso do *Valor futuro de capital*, é justamente a fórmula 3.13 do montante no sistema de capitalização composta, como explicitado também na Figura 14.

A funcionalidade *Aplicação com depósitos regulares* pode ser explorada em situações em que o cidadão quer descobrir quanto terá no futuro se economizar e aplicar, todo mês, uma parcela de sua renda. Assim como na funcionalidade *Valor futuro de capital*, são dadas quatro situações exemplos de como essa função pode ser utilizada.

A Figura 15 mostra essa função bem como sua metodologia utilizada para os cálculos, a qual será explicitada a seguir.

A situação de n depósitos regulares e iguais a p, realizados no início de cada período e corrigidos até o final dos n períodos, forma uma sequência de somas S_n como a apresentada abaixo.

$n = 1$: $\quad S_1 = p(1 + j)$

$n = 2$: $\quad S_2 = p(1 + j) + p(1 + j)^2$

$\ldots$

$n = k$: $\qquad S_k = p(1+j) + p(1+j)^2 + \cdots + p(1+j)^k$

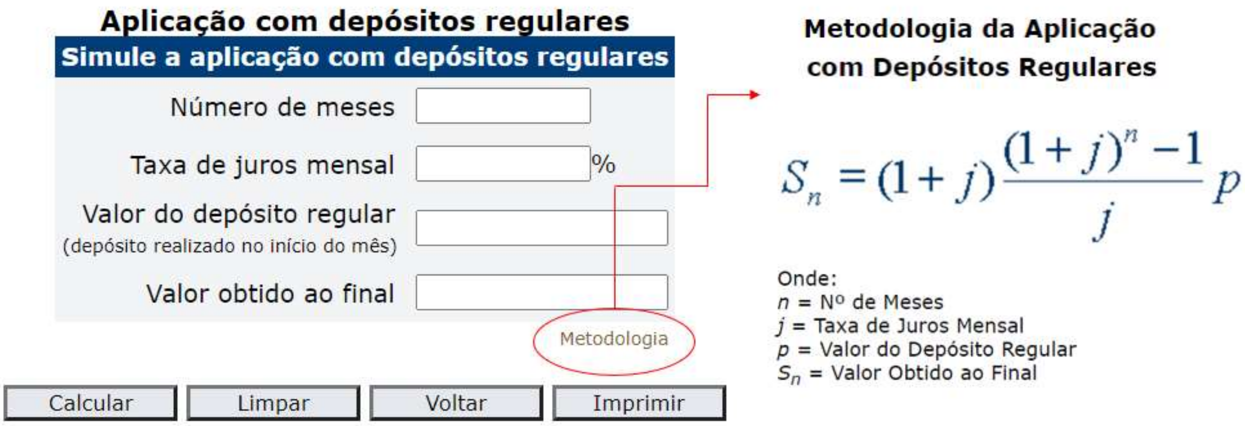
Primeiramente, observe que S_1 seria o último depósito (depósito número n), o qual foi corrigido por um mês apenas, considerando o fim do nº mês. Além disso, observe que S_n é a soma finita de uma progressão geométrica de razão $(1+j)$ e primeiro termo $p(1+j)$, uma vez que p seria o termo inicial que já sofreu incidência de um mês de taxa de juros.

Daí pela equação 3.9 tem-se

$$S_n = p(1+j) \cdot \frac{[1-(1+j)^n]}{1-(1+j)} \Rightarrow S_n = (1+j) \cdot \frac{(1+j)^n - 1}{j} \cdot p,$$

como utilizado de acordo com a metodologia da Calculadora mostrado pela Figura 15.

Figura 15 - Metodologia Aplicação com depósitos regulares (CdC)

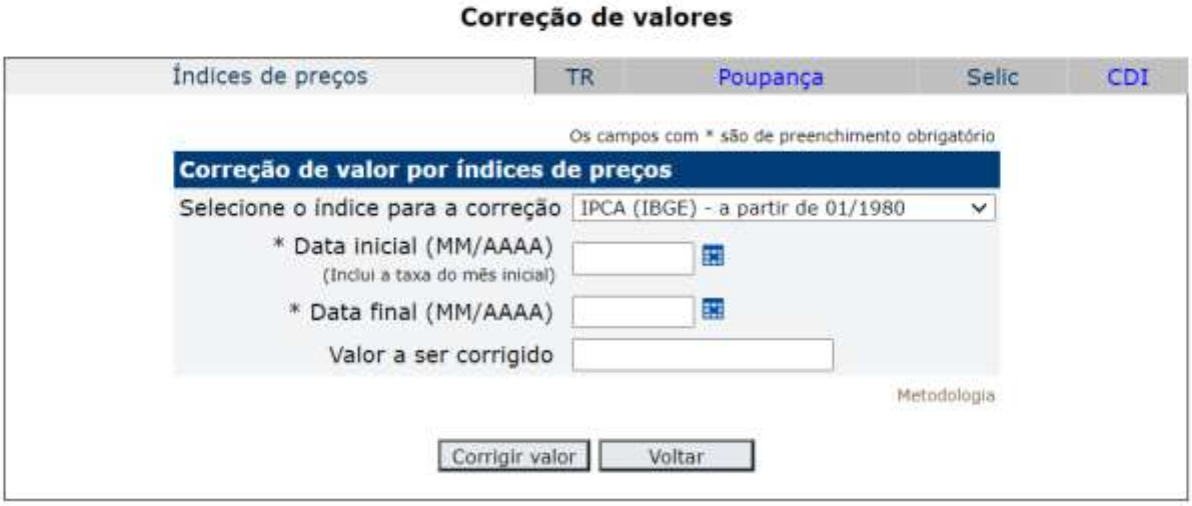


Fonte: Calculadora do Cidadão, 2021.

A funcionalidade *Correção de valores* pode ser utilizada em diversas situações, por exemplo, para descobrir quanto vale hoje uma determinada quantia corrigida pela inflação, podendo ser utilizado diferentes índices para os cálculos como o IPCA, IGPM, entre outros. Outro exemplo de aplicação dessa funcionalidade é descobrir o rendimento real da Caderneta de Poupança e o rendimento de alguma aplicação de renda que utiliza o CDI como base para seus cálculos de rendimentos. A Figura 16 apresenta essa ferramenta e suas diferentes funcionalidades.

E por último, outra funcionalidade da calculadora é o *Financiamento com prestações fixas*, e pode ser explorada em situações de empréstimos e amortizações, considerando o sistema SAC e PRICE. Conforme mencionado anteriormente, esta última não será explorada neste trabalho, uma vez que o foco são investimentos e não financiamentos.

Figura 16 - Correção de valores (CdC)



Fonte: Calculadora do Cidadão, 2021.

A dissertação de Santos (2018), produzida também no âmbito do PROFMAT, de título "Uso da Calculadora do Cidadão na Resolução de Problemas" explora a Calculadora e suas diferentes funcionalidades, dessa forma indicamos esse trabalho para aprofundar as possibilidades de aplicações dessa ferramenta em sala de aula.

No próximo capítulo, abordaremos a teoria dos conceitos necessários para compreender a base dos investimentos financeiros, para além da Matemática Financeira já apresentada nesse capítulo. Serão trabalhados diferentes conceitos, incluindo taxas e índices importantes, como alguns já citados, inflação (IPCA, IGP-M), CDI, SELIC, além dos diferentes tipos de investimentos financeiros.

4 INVESTIMENTOS

De maneira ampla, investimentos podem ser compreendidos como um desembolso em que há uma expectativa de um retorno futuro, podendo o tempo, o dinheiro, a energia e a atenção, serem considerados como capital para investir: tempo, dinheiro, energia, atenção, entre outros (DUBARD, 2019).

Dessa forma, podemos definir investimentos financeiros como uma aplicação de um valor em dinheiro em que há expectativa de rendimento futuro (GOMES, 2020). Importante ressaltar que devemos nos atentar à diferença entre especulação e investimento, uma vez que "uma operação de investimento é aquela que, após análise profunda, promete a segurança do principal e um retorno adequado. As operações que não atendem a essas condições são especulativas" (GRAHAM, 2017, p. 37). Costa (2016) ainda menciona a diferença entre investir, poupar, especular e apostar.

Para investir é necessário, inicialmente, conhecimento e estudo. Além disso, em relação a aplicação financeira é necessário considerar o retorno, o risco e a liquidez dessa aplicação. O retorno está relacionado à rentabilidade da aplicação, geralmente dada em porcentagem e expressa quanto aquela aplicação retornou financeiramente. O risco está relacionado ao grau de incerteza em relação ao rendimento de um investimento. E por último, a liquidez é a capacidade que um ativo tem de se transformar em dinheiro disponível. Quanto maior a liquidez de um investimento, mais rápido é possível fazer o resgate do dinheiro investido.

Além desses pequenos conceitos, ao investir é também importante considerar o perfil de cada investidor, de acordo com sua realidade e objetivos financeiros. Cerbasi (2019) aponta que outro cuidado necessário para obter sucesso em seus investimentos é diversificá-los para diminuir riscos e sempre os revisar, pelo menos mensalmente para acompanhar o progresso.

Nesse capítulo, primeiramente serão apresentados os conceitos de Investimentos na Educação Básica, e discutido a abordagem dada a eles para, em seguida, apresentarmos conceitos importantes das diferentes modalidades de investimentos financeiros.

4.1 A abordagem de conceitos de Investimentos na Educação Básica

Gomes (2020) aponta que investimentos financeiros é um tema atual que tem chamado muito a atenção, sendo frequentemente apresentado em vídeos veiculados na internet, sítios eletrônicos, revistas e mídias sociais. Para o autor, "o homem, desde cedo, em sua infância, lida com o dinheiro e deverá ser capaz de administrá-lo em toda sua trajetória de vida. Saber, portanto, como administrar e investir o dinheiro é essencial para uma vida financeira de maior qualidade" (GOMES, 2020, p. 10).

Diversas pesquisas[7] veiculadas pela mídia apontam que o número de jovens que começaram a investir tem crescido consideravelmente nos últimos anos. Em pesquisa sobre o perfil do investidor brasileiro, feita pela ANBIMA em 2021, aponta que jovens entre 16 a 24 anos são por volta de 19% dos investidores brasileiros. Dessa forma, mais uma vez visa-se a necessidade a preparação desses jovens cidadãos para lidar com o mercado financeiro.

Em relação ao âmbito escolar, como já apresentado, Muniz (2016) considera que discussões que envolvam investimentos contribuem para a Educação Financeira dos estudantes. Em conformidade, a BNCC (BRASIL, 2018) sugere que sejam abordados, durante o período da Educação Básica, "conceitos básicos de economia e finanças, visando à educação financeira dos alunos. Assim, podem ser discutidos assuntos como taxas de juros, inflação, aplicações financeiras (rentabilidade e liquidez de um investimento) e impostos" (BRASIL, 2018, p. 269).

De acordo com o Plano Diretor da ENEF, a Educação Financeira deve assegurar que o cidadão está adequadamente capacitado para lidar com o mercado financeiro, compreendendo caraterísticas, riscos e oportunidades de cada investimento.

> A Educação Financeira deve promover a conscientização dos investidores oferecendo um conjunto amplo de informações sobre os tipos de investimentos disponíveis no mercado, apresentadas sob a ótica do investidor, de forma clara, completa e sem viés comercial (BRASIL, 2011a).

No entanto, como não existem habilidades explícitas e nem uma componente curricular que trabalhe de forma clara e inequívoca com o tema de Investimentos Financeiros, pouco se fala sobre essa temática em específico na Educação Básica. Acreditamos que o Novo Ensino Médio e os Itinerários Formativos sobre Educação Financeira devem pilotar uma mudança sobre a abordagem desse tema nas escolas.

Com o objetivo de disseminar conhecimentos de Finanças para os estudantes do Ensino Médio, foram criadas as Olimpíadas Brasileiras de Investimentos (OBInvest), cuja primeira edição ocorreu no primeiro semestre de 2021. A OBInvest foi elaborada com o intuito de proporcionar Educação Financeira aos participantes, em uma visão integradora e interdisciplinar de conceitos de Finanças e as competências do Ensino Médio, além de

---

[7] Matéria escrita por Luana Meneghetti em agosto de 2021 e publicada pelo Estadão. https://einvestidor.estadao.com.br/comportamento/cresce-jovens-investidores-bolsa-b3
Matéria escrita por Robert Siqueira em junho de 2021 e publicada pelo Jornal da USP. https://jornal.usp.br/atualidades/jovens-ja-representam-1-4-dos-investidores-na-bolsa-de-valores-brasileira/

apresentar um novo mercado de trabalho em Finanças como possibilidade para os jovens (OBInvest, 2021).

Por fim, julgamos importante investigar algumas produções acadêmicas acerca da temática de Investimentos Financeiros abordados durante a Educação Básica e para tanto, realizamos um mapeamento sobre as ~~de~~ dissertações produzidas no âmbito do Mestrado Profissional de Matemática em Rede Ampla – PROFMAT, o qual pode ser lido na íntegra em Nunes e Pagani (2021)

A Tabela 8 apresenta a relação do número de dissertações encontradas no repositório do PROFMAT que possuíam algum dos descritores "Educação Financeira" (EF), "Matemática Financeira" (MF) ou "Investimentos Financeiros" (IF) em seus títulos.

Tabela 8 - Dissertações PROFMAT

Ano	Número de dissertações EF	Número de dissertações MF	Número de dissertações IF
2013	1	25	-
2014	2	25	-
2015	5	22	1
2016	8	28	-
2017	5	15	2
2018	8	17	3
2019	11	7	-
2020	13	9	3
2021(até março)	3	5	3
TOTAL	56	153	12

Fonte: Nunes e Pagani (2021).

Observamos que o número de dissertações sobre Educação Financeira é praticamente crescente desde o início do programa. Essa constatação corrobora o fato de que a Educação Financeira Escolar tem ganhado espaço nos últimos anos, principalmente após 2017 e 2018, anos da homologação da BNCC do Ensino Fundamental e Ensino Médio, respectivamente.

Com relação ao número de dissertações sobre Matemática Financeira, é possível perceber que este foi diminuindo ao longo dos anos, mesmo assim, esse número é praticamente o triplo de dissertações sobre Educação Financeira. Isso pode ser consequência do fato do PROFMAT ser um mestrado em Matemática. No entanto, as autoras ainda ressaltam que mesmo que analisados separadamente, muitos dos trabalhos relacionam essas duas vertentes (MF e EF), o que nos sugere fortemente que a Matemática Financeira Escolar e Educação Financeira Escolar relacionam-se e complementam-se.

Além disso, no âmbito dos Investimentos Financeiros, observamos que apenas 12 dissertações citam diretamente a palavra “Investimento” em seus títulos. No entanto, como investimentos financeiros podem ser estudados com o intuito de desenvolver a Educação Financeira e utilizando a Matemática Financeira como ferramenta, algumas dissertações cujos títulos não mencionam diretamente investimentos, mas citam Educação Financeira ou Matemática Financeira, podem abordar essa temática.

Sendo assim, foi necessário um refinamento dessas dissertações com intuito de identificar quais abordavam, mesmo que de maneira sucinta, o tema de investimentos financeiros. Após leitura dos resumos e palavras-chave, foi possível reduzir esse número, selecionando 35 dessas dissertações. Dentre essas 35, apenas 19 focam suas pesquisas em investimentos e as outras 16, ao abordarem investimentos, o fazem apenas de forma complementar a outras temáticas principais.

Concluímos que, de maneira geral, há uma carência de pesquisas voltadas à temática de Investimentos Financeiros, mas esse tema é algumas vezes abordado como tópico em algumas pesquisas voltadas à temática de Educação Financeira. Além disso, a maioria das pesquisas propõe o tema apenas para o Ensino Médio, e as autoras acreditam que isso se deve ao fato dessa etapa da Educação Básica possibilitar uma abordagem matemática mais técnica.

No entanto, acreditamos que o tema de Investimentos Financeiros pode e deve ser abordado em todos os anos finais do Ensino Fundamental e em todo Ensino Médio, levando-se em consideração as especificidades de cada ano/série. Essa ação pode despertar o interesse dos estudantes acerca dessa temática e prepará-los para uma inserção crítica na área de Finanças.

Nas subseções seguintes serão apresentados os principais conceitos ligados ao tema de Investimentos Financeiros que julgamos importantes de serem discutidos na Educação Básica, a exemplo tem-se as taxas básicas da economia, como a inflação, a SELIC e o CDI, além das diferentes modalidades de investimentos em Renda Fixa e em Renda Variável. Todos esses conceitos estão presentes na sequência didática produzida e desenvolvida com os estudantes.

4.2 Taxas Básicas

É comum alguns investimentos estarem atrelados a indexadores da economia brasileira e entender o que eles significam é de extrema importância para compreender o cenário econômico nacional e o rendimento dos investimentos (PRADO, 2018). Dessa forma, apresentaremos a seguir as taxas SELIC, inflação e CDI,

4.2.1 SELIC

O Sistema Especial de Liquidação e Custódia (SELIC) é uma infraestrutura do mercado financeiro administrada pelo Banco Central, que registra, controla e custodia eletronicamente todas as operações de títulos públicos federais. A taxa SELIC é a taxa básica de juros da economia brasileira, influenciando todas as taxas de juros do país, como as taxas de financiamentos, empréstimos e aplicações financeiras (BANCO CENTRAL, 2021).

A Taxa SELIC Over[8] é calculada diariamente como a média ponderada de todas as operações feitas no SELIC. Dessa forma, essa Taxa refere-se à taxa de juros apurada nas operações de empréstimos de um dia útil entre as instituições que utilizam títulos públicos federais como garantia.

O Banco Central opera no mercado de títulos públicos para que a Taxa SELIC Over esteja de acordo com a Taxa SELIC Meta, que é a taxa definida pelo Comitê de Política Monetária (COPOM). A taxa SELIC Meta é utilizada pelo Banco Central como principal ferramenta para controlar a inflação (BANCO CENTRAL, 2021). A Figura 17 mostra um esquema, elaborado pelo Banco Central, que representa alguns dos efeitos quando há alteração na taxa SELIC.

Exemplo 4.1: Considere que o COPOM tenha divulgado em uma de suas reuniões que a meta para a taxa SELIC é 9,5% ao ano. Calcule a taxa equivalente por dia útil, sabendo que o Banco Central padronizou o número de dias úteis do ano e do mês como 252 e 21, respectivamente[9].

<u>Resolução:</u> Pela equação 3.10 tem-se $1 + I = (1 + i)^t$, daí

$1 + 0{,}095 = (1 + i)^{252}$

$\Rightarrow 1{,}095^{\frac{1}{252}} = 1 + i$

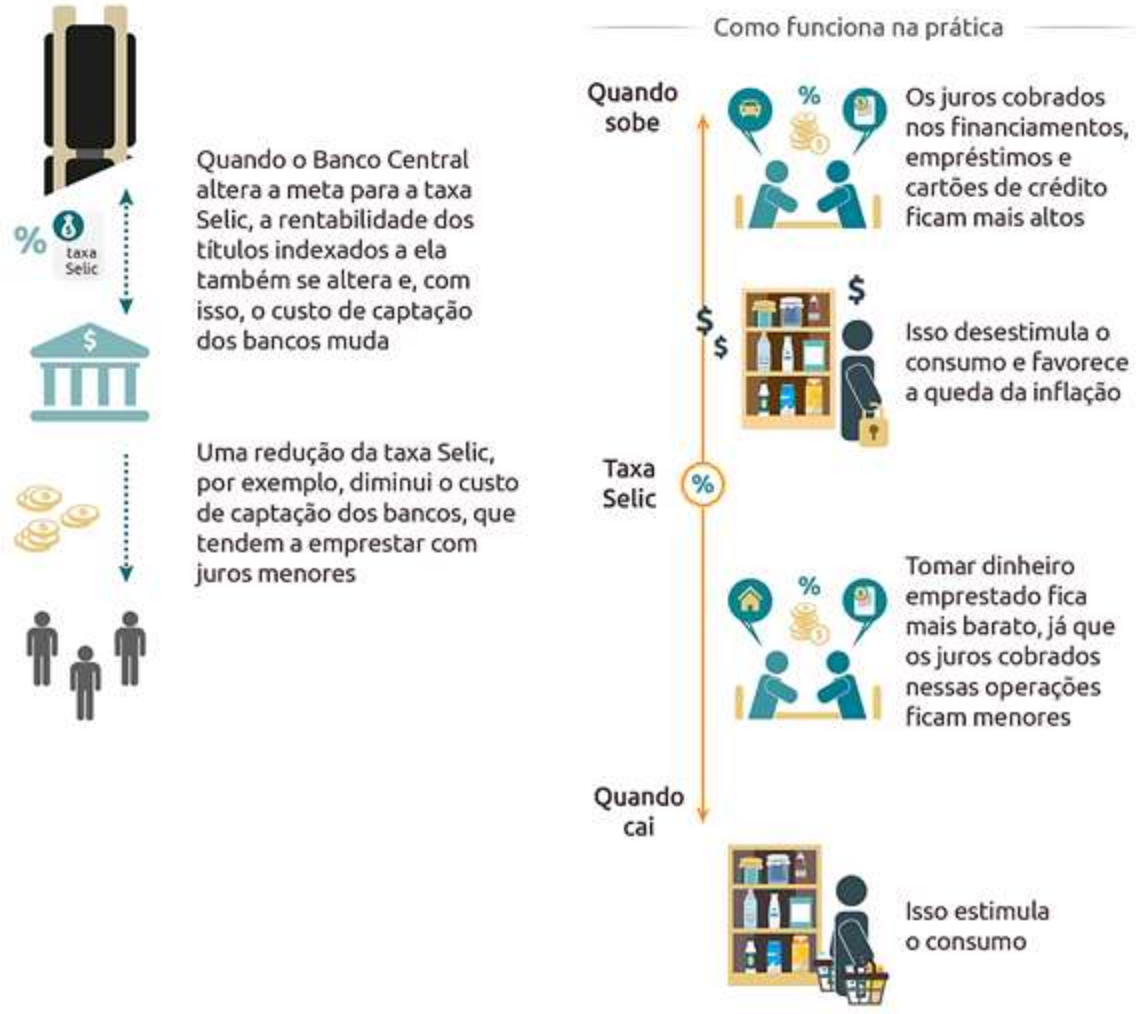
$\Rightarrow i = 1{,}095^{\frac{1}{252}} - 1$

$\Rightarrow i \approx 0{,}0004 = 0{,}04\%$ ao dia útil.

[8] A palavra Over vem de Overnight e refere-se a operações realizadas no mercado aberto pelo prazo mínimo de um dia útil, por isso, também são conhecidas como Taxa por dia útil.

[9] Padrão foi divulgado por meio da Circular nº 2.761/1997. (CAMARGOS, 2013)

Figura 17 - Efeitos de mudanças da taxa SELIC



Fonte: Banco do Brasil, 2021.

4.2.2 Inflação

Como apresentado, a taxa SELIC é uma forma do Banco Central controlar a inflação. Dessa forma faz-se necessário compreendermos o que é a inflação. Assaf (2002) aponta que "de maneira simplista, o processo inflacionário de uma economia pode ser entendido pela elevação generalizada dos preços dos vários bens e serviços" (p. 119). Ou seja, como há um aumento dos preços, uma unidade da moeda passa a comprar menos produtos havendo, dessa forma, uma desvalorização da moeda. Melhor dizendo, a inflação compromete o poder de compra dos cidadãos.

O processo contrário a inflação, diante de uma baixa predominante dos preços do mercado dos bens e serviços, é a deflação. O processo inflacionário ocorre por diferentes causas, sendo algumas a Lei da oferta e da procura, economia do país, mercado de câmbio, gastos públicos e outros.

A inflação pode ser calculada através taxa percentual de aumento dos preços em relação ao preço inicial, ou seja

$$i_i = \frac{P_n}{P_{n-t}} - 1, \tag{4.1}$$

onde i_i representa a taxa de inflação entre os períodos n e $n-t$, P_n é o preço no período n e P_{n-t} é o preço no período $n-t$.

A inflação pode ser medida pelos índices de preços, que indicam a variação dos preços de uma cesta de produtos e serviços consumidos pela população, evidenciando o impacto no custo de vida da população.

No Brasil, o Índice de Preço ao Consumidor Amplo (IPCA) é utilizado como índice oficial de inflação, e deve ser referência para as metas de inflação e para taxa SELIC. O IPCA é calculado pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), o qual faz

> levantamento mensal, em 13 áreas urbanas do País, de, aproximadamente, 430 mil preços em 30 mil locais. Todos esses preços são comparados com os preços do mês anterior, resultando num único valor que reflete a variação geral de preços ao consumidor no período (IBGE, 2021, s/p).

Vale ressaltar que a cesta pessoal de compras pode ser diferente da cesta média consumida pela população brasileira, devido as especificidades de consumo pessoal e, dessa forma, cada indivíduo possuí um índice pessoal de inflação, podendo este ser maior ou menor que o IPCA.

Além do IPCA, existem outros índices de preços como o Índice Nacional de Preços ao Consumidor (INPC), também calculado pelo IBGE. No entanto, é verificado a variação do custo médio apenas de família com renda mensal entre 1 e 5 salários-mínimos, que são grupos mais sensíveis a variações de preços. Há também o Índice Geral de Preços do Mercado (IPG-M) é outro índice de preço, calculado pela Fundação Getúlio Vargas (FGV) que é muito utilizado para contratos de aluguel, seguro de saúde, tarifas públicas, entre outros.

Exemplo 4.2: Considere a Tabela 9 abaixo que representa a correção de R$ 550,00, de acordo com o IPCA, no período de junho a dezembro de 2020. Os valores foram obtidos por meio da função Correção de Valores da Calculadora do Cidadão. Qual foi a inflação verificada no segundo semestre de 2020?

Tabela 9 - Correção IPCA

MÊS	Junho	Julho	Agosto	Setembro	Outubro	Novembro	Dezembro
Valor corrigido (IPCA)	R$ 550,00	R$ 553,42	R$ 586,68	R$ 595,42	R$ 612,14	R$ 631,92	R$ 658,89

Fonte: elaborado pela autora, 2021.

Resolução: Inicialmente podemos verificar que o valor corrigido ao final de dezembro é aproximadamente 119,8% em relação ao valor em julho, uma vez que $\frac{658{,}89}{550} \approx 119{,}798\%$.
Dessa forma, considerando julho o nosso todo (100%), temos que houve um aumento de aproximadamente 19,8% (119,8%-100%), o que é considerado como a taxa de inflação nesse determinado período.
Outra forma de resolver é utilizando diretamente a equação 4.1, daí, tem-se:

$$I_i = \frac{658{,}89}{550} - 1 \approx 0{,}19798 \approx 19{,}8\%.$$

Taxa aparente e taxa real

Assaf (2002) ressalta que em ambientes inflacionários é indispensável compreendermos o conceito de taxa aparente e taxa real. A taxa aparente, também conhecida como taxa nominal, é aquela adotada nas operações do mercado e que incluí os efeitos inflacionários previstos para o prazo de operação. Por sua vez, a taxa real é aquela obtida livre das influências da taxa de inflação verificada em um determinado período da taxa aparente. Ou seja, a taxa real é obtida descontando-se a inflação do período sobre o rendimento aparente obtido. assim, tem-se

$$i_r = i_a - i_i \Rightarrow i_a = i_r + i_i \,, \tag{4.2}$$

em que i_r, i_a e i_i são a taxa real, taxa aparente e taxa de inflação, respectivamente.

No entanto, Camargos (2013) aponta que essa igualdade acima serve apenas para expressar os conceitos de taxa real e aparente, e que em termos algébricos, os cálculos são efetuados de outra maneira. Isso porque o cálculo feito de acordo com a equação 4.2 considera que ambas as taxas, aparente e inflacionária causam efeito sobre o mesmo capital C, mas “o certo é considerar o efeito da inflação primeiro e depois verificar a taxa líquida real do rendimento, como se ambas, taxa de inflação e taxa real, estivessem em uma relação composta” (CAMARGOS, 2013, s/p).

Daí, tem-se pela equivalência de taxas que

$$C(1 + i_a) = C(1 + i_i)(1 + i_r)$$

$\Rightarrow (1 + i_a) = (1 + i_i)(1 + i_r)$

$\Rightarrow 1 + i_r = \dfrac{1 + i_a}{1 + i_i},$

e segue que

$$i_r = \frac{1 + i_a}{1 + i_i} - 1 \,. \tag{4.3}$$

Essa equação é conhecida como fórmula de Fisher, uma vez que foi originalmente proposta por Irving Fisher em 1930, e é utilizada para determinar a taxa real de uma operação financeira, quando as três taxas estão relacionadas a um mesmo intervalo de tempo. Dessa relação, tem-se que $i_a \approx i_r + i_i$.

Exemplo 4.3: Um investidor aplicou parte de seu capital em um ativo e durante um ano no mercado financeiro, obteve uma rentabilidade aparente de 13,5% a.a. Determine a taxa real proporcionada pelo investimento, sabendo que a taxa de inflação nesse mesmo período foi de 7% a.a.

Resolução: Pela equação 4.3 tem-se

$i_r = \dfrac{1 + 0{,}135}{1 + 0{,}07} - 1 \approx 0{,}061 = 6{,}1\%.$

Observe que $i_r \approx i_a - i_i = 13{,}5\% - 7\% = 6{,}5\%.$

Exemplo 4.4: (CAMARGOS, 2013 - Adaptado) Um investidor aplicou R$ 23.500 na bolsa de valores por quatro meses, sem realizar nenhum saque no período. Os rendimentos e a inflação mensal do período foram:

Figura 18 - Exemplo Inflação e Rendimentos de um Investimento

	Mês 1	Mês 2	Mês 3	Mês 4
Rendimento	3,68% a.m.	4,79% a.m.	– 2,74% a.m.	2,94% a.m.
Inflação	0,52% a.m.	0,28% a.m.	– 0,09% a.m.	– 0,11% a.m.

Fonte: Camargos, 2013.

Determine:

a) a taxa de rendimento acumulada no período;

b) o montante disponível para saque no final do período;

c) a inflação acumulada no período;

d) a taxa real obtida ao final do investimento.

<u>Resolução:</u>

a) $1 + i_a = (1 + 0{,}0368)(1 + 0{,}0479)(1 - 0{,}0274)(1 + 0{,}0294) \approx 1{,}0878$

$i_a \approx 0{,}0878 = 8{,}78\%$

b) $M = 23.500(1 + 0{,}878) = 25.563{,}30$ reais.

c) $1 + i_i = (1 + 0{,}0052)(1 + 0{,}0028)(1 - 0{,}0009)(1 - 0{,}0011) \approx 1{,}006$

$i_i = 0{,}6\%$.

d) $i_r = \frac{1+0{,}0878}{1+0{,}006} - 1 \approx 0{,}0813 = 8{,}13\%$.

4.2.3 CDI

O Certificado de Depósito Interbancário funciona como um empréstimo realizado entre os bancos. O banco que empresta muito dinheiro toma emprestado dos bancos que captam mais dinheiro, pagando a taxa CDI negociada no dia[10] entre os bancos.

> Dessa forma, é possível garantir o cumprimento de uma norma conhecida como Acordo de Basileia. Essa regulação proíbe que uma instituição financeira no Brasil feche o dia com saldo negativo em caixa. Essa regra existe para assegurar que todo banco sempre terá dinheiro para honrar seus compromissos. É uma medida de proteção para os correntistas, além de procurar evitar que a instituição passe por problemas financeiros. Assim, os bancos que não possuem caixa positivo no final do dia, recorrem a esses empréstimos. Com isso, a transferência de recursos entre bancos promove a solidez do sistema interbancário. (WARREN, 2019, s/p).

Cerbasi (2019) aponta que em situações consideradas normais, a taxa CDI costuma estar próxima da taxa SELIC, podendo estar acima ou abaixo. A taxa CDI é utilizada como referência para o mercado financeiro e muitos investimentos são indexados considerando-a.

Exemplo 4.5: Um banco emprestou R$ 2.500.000 para outro banco, via CDI, por um período de 4 dias úteis, recebendo ao final R$ 2.506.000,00. Determine o valor da taxa CDI média ao dia útil, dessa operação interbancária.

<u>Resolução:</u> Inicialmente, vamos calcular a taxa percentual durante o período de 4 dias úteis $\frac{2.506.000}{2.500.000} - 1 = 1{,}0024 - 1 = 0{,}0024 = 0{,}24\%$.

Daí, sendo i_{CDI} o valor da taxa CDI ao dia útil (a.u.), tem-se

[10] A taxa CDI é outro exemplo de taxa Overnight, pelo fato de ser calculada no fechamento diário de acordo com os caixas dos bancos.

$$1 + 0{,}0024 = (1 + i_{CDI})^4 \Rightarrow 1{,}0006 \approx 1 + i_{CDI} \Rightarrow i_{CDI} \approx 0{,}0006 = 0{,}06\%\ a.u.$$

4.3 Investimentos em Renda Fixa

A Renda Fixa é uma aplicação financeira na qual o investidor empresta seu dinheiro para uma instituição pública, como o governo, ou uma instituição privada, como empresas ou bancos.

> Assim, um título de renda fixa comprova o empréstimo do comprador ao emissor do título, no qual, contém um prazo de vencimento, o valor negociado, taxa de juros, forma de negociação, e todas as informações que venham ser necessárias, tais como liquidez do título. (PRADO, 2018, p. 33)

O nome Renda Fixa pode gerar confusão, pois muitas pessoas acreditam que renda fixa seriam aquele investimento em que a rentabilidade é constante, mas isso não necessariamente é verdade. A taxa de juros de investimentos em renda fixa pode ser estabelecida de maneira pré-fixada ou pós-fixada. Na taxa pré-fixada, é conhecido a taxa nominal de juros no ato da compra do título, sabendo de forma antecipada a rentabilidade do título, por exemplo 10% a.a., 0,5% a.m. entre outros. Já na taxa pós-fixada, a rentabilidade é estabelecida por meio de uma taxa de juros estabelecida previamente somada a um fator de correção de um indexador, que pode variar ao longo do tempo, dessa forma, a rentabilidade só será conhecida ao fim do investimento. Os indexadores mais comuns utilizados são o IPCA, IPGPM, SELIC e CDI, por exemplo 4% a.a. + IPCA, 120% CDI, SELIC.

Cerbasi (2019) aponta que cada modalidade, pós-fixada e pré-fixada, são melhores em situações distintas.

> Se a tendência dos juros da economia é de queda, você fará melhor negócio optando por taxas prefixadas, que garantirão rentabilidades próximas às atuais por mais tempo. Por outro lado, se a queda nos juros de mercado for certa, seu banco lhe oferecerá uma taxa menor na renda fixa prefixada. Se o futuro é incerto, as taxas pós fixadas são melhores, pois, em caso de inflação, o governo tende a elevar juros para desaquecer a economia e seu dinheiro crescerá mais. (CERBASI, 2019, p. 130)

Exemplo 4.6: Carina é uma investidora com perfil mais conservador e decidiu investir R$ 2.500,00 em títulos de renda fixa por um período de 2 anos. Do valor disponível, R$ 1.000,00 foram investidos à uma taxa pré-fixada de 8% a.a., e os outros R$ 1.500,00 foram investidos a taxa pós-fixada de 2% a.a. + IPCA. Sabendo que a taxa IPCA nesses dois anos foi, respectivamente, igual a 4,5% a.a. e 7% a.a., qual foi o montante resgatado por Carina após esses dois anos?

Resolução:

1) Título pré-fixado: $M_1 = 1.000(1 + 0{,}08)^2 = 1.166{,}40$

2) Título pós-fixado: $M_2 = 1.500(1 + 0{,}02)(1 + 0{,}045)(1 + 0{,}02)(1 + 0{,}07) = 1744{,}98$

$M_T = M_1 + M_2 = 1.166{,}40 + 1.744{,}98 = 2.911{,}38$.

Daí, o montante resgatado foi de R$ 2.911,38.

Compreendido o conceito de investimentos, alguns indexadores e o conceito de renda fixa, passaremos agora a apresentar alguns tipos de investimentos em renda fixa.

4.3.1 Caderneta de Poupança

A Caderneta de Poupança é a modalidade de investimento mais popular no Brasil e, de acordo com pesquisa feita pela ANBIMA (Associação Brasileira das Entidades dos Mercados Financeiros e de Capitais) em 2021, em relação ao perfil do investidor brasileiro, a Caderneta de Poupança é utilizada por 29% dos entrevistados e é a modalidade de investimento mais utilizada. Além disso, a pesquisa também aponta que 89% dos entrevistados conhecem a Caderneta de Poupança, sendo, portanto, a modalidade de investimento mais conhecida.

Cerbasi (2019) afirma que a popularidade da Poupança[11] se deve por conta de sua simplicidade. Prado (2018) complementa apontando que

> Tal popularidade pode ser atrelada ao fácil acesso, fácil movimentação, baixo capital inicial necessário e fácil entendimento comparada aos outros investimentos de renda fixa. Um outro fator importante é a não necessidade de conta corrente atrelada, não havendo geração de custos com a manutenção de conta. (p. 38)

Além disso, a Poupança possuí liquidez imediata, ou seja, o investidor pode retirar o montante aplicado a qualquer momento, devendo atentar-se apenas a data de aniversário da Poupança. Uma vez que a remuneração é feita a cada mês completado, recursos resgatados antes da data de aniversário perdem a remuneração do mês em curso.

Outra vantagem é o fato de que a Caderneta de Poupança tem risco bem baixo, uma vez que recursos aplicados na Poupança estão protegidos pelo Fundo Garantidor do Crédito (FGC)[12] e se aplicados na Poupança da Caixa Econômica Federal têm garantia pela União. Ademais, na Caderneta de Poupança não há incidência de imposto de renda para pessoas físicas e nem IOF (Imposto sobre Operações Financeiras).

---

[11] Nome popular da Caderneta de Poupança.

[12] O FGC é uma entidade privada e sem fins lucrativos que protege os investidores que colocam seu dinheiro em instituições associadas a ele. O FGC garante R$ 250 mil por CPF por instituição.

Nessa modalidade de investimento, o investidor empresta seu dinheiro para o banco, sendo ele destinado a levantar fundos para o financiamento imobiliário. As características da Caderneta de Poupança são idênticas em qualquer banco, incluindo sua remuneração.

Em 2012, a Lei nº 12.703 (BRASIL, 2012) mudou a forma de remuneração da Caderneta de Poupança, passando a ser definida pela soma de dois componentes:

I. Componente Básico:
   Calculado pela Taxa Referencial (TR)[13] na data de depósito.
II. Componente adicional:
   a. 0,5% ao mês, quando a meta da taxa SELIC for superior a 8,5% a.a.
   b. 70% da Taxa SELIC, quando a meta dessa taxa for menor ou igual a 8,5% a.a.

Exemplo 4.7: (PRADO, 2018 - Adaptado) Um investidor depositou R$ 30.000,00 no dia 10/10/2017. Porém, devido a um imprevisto financeiro, precisou retirar no dia 09/01/2018. Qual será o valor final resgatado? Considere que a rentabilidade da TR no período analisado foi de 0% e a SELIC foi de 7% ao ano.

Resolução:

I. **Período de Investimento:** Nesse período, só há dois meses completos, de 10/10 a 10/11 e 10/11 a 10/12. Como a data de resgate foi 09/01, um dia antes do aniversário da Poupança, e não há taxas proporcionais para períodos menores que um mês, então o período de investimento foi 2 meses.
II. **Rentabilidade:** Como a taxa SELIC anual foi inferior a 8,5%, a rentabilidade da Poupança será de 70% da taxa da SELIC. Como a capitalização é feita mensalmente, primeiramente, devemos encontrar a taxa mensal equivalente. Daí, a taxa SELIC
   $1 + 0{,}07 = (1 + i)^{12} \Rightarrow 1{,}07^{\frac{1}{12}} = 1 + i \Rightarrow i \approx 0{,}0057 = 0{,}57\%\ a.m.$
   E, portanto, o rendimento da Poupança é de
   $0{,}7 \cdot 0{,}57\% = 0{,}399\%\ a.m.$
III. **Valor Final:** Conhecendo o capital inicial aplicado, a taxa de juros e o período de aplicação, temos que o valor final resgatado, M, será de
   $M = 30.000(1 + 0{,}00399)^2 = 30.239{,}88$ reais.

[13] A TR é um índice financeiro que já funcionou como parâmetro para os juros praticados no Brasil. Ela é calculada com base na taxa de juros das Letras do Tesouro Nacional registradas no SELIC, e desse valor é deduzido um fator redutor estabelecido pelo Banco Central. (CERBASI, 2019).

Ponaht (2015, p. 52) salienta que a maior desvantagem da Caderneta de Poupança é a "baixa rentabilidade real já que não é levado em consideração o efeito da inflação sobre sua remuneração". A Tabela 10 abaixo representa a taxa real anual de rendimento da Poupança, considerando aproximação da fórmula de Fisher. Os dados de rendimento nominal da Poupança e o IPCA foram obtidos pela Calculadora do Cidadão.

Tabela 10 - Rendimento Real Caderneta de Poupança

Ano	IPCA	Rendimento Aparente (Caderneta de Poupança)	Rendimento Real (Caderneta de Poupança)
2013	6,75%	5,24%	-1,51%
2014	7,39%	6,44%	-0,95%
2015	11,54%	7,29%	-4,25%
2016	7,31%	7,57%	0,26%
2017	3,27%	6,16%	2.89%
2018	4,20%	4,24%	0,04%
2019	4,46%	3,96%	-0,50%
2020	5,72%	1,99%	-3,73%

Fonte: a autora, 2021.

Observe que o rendimento real da Poupança algumas vezes é negativo, ou seja, por mais que o capital tenha rendido juros durante esse período de tempo, o rendimento foi menor que a inflação e, portanto, o investidor perdeu poder de compra. Em um investimento, o mínimo esperado é que se mantenha o poder de compra.

4.3.2 Tesouro Direto

Outro tipo de investimento em Renda Fixa são os títulos públicos, também conhecidos como Tesouro Direto, que são ativos emitidos pelo governo federal com objetivo de financiar dívidas públicas e atividades do governo, permitindo que investidores emprestem seu dinheiro para o governo visando, uma rentabilidade futura.

O Tesouro Direto é um Programa do Tesouro Nacional desenvolvido em parceria com a B3, bolsa de valores oficial do Brasil, para venda de títulos públicos federais para pessoas físicas. Esse Programa surgiu com objetivo de democratizar o acesso aos títulos públicos, permitindo aplicações a partir de R$30,00 (TESOURO DIRETO, 2021).

Além de serem investimentos muitos acessíveis, o Tesouro Direto oferece boa rentabilidade, liquidez diária e diferentes opções de investimentos (TESOURO DIRETO, 2021). A Figura 19 mostra uma tabela retirada do sítio do Tesouro Direto com as diferentes opções de compras dos títulos.

Figura 19 - Tesouro Direto: preços e taxas dos títulos

Título	Rentabilidade anual	Investimento mínimo	Preço Unitário	Vencimento
TESOURO PREFIXADO 2024	10,98%	R$ 30,77	R$ 769,43	01/07/2024
TESOURO PREFIXADO 2026	10,70%	R$ 33,17	R$ 663,48	01/01/2026
TESOURO PREFIXADO com juros semestrais 2031	10,77%	R$ 30,15	R$ 1.005,04	01/01/2031
TESOURO SELIC 2024	SELIC + 0,1086%	R$ 111,65	R$ 11.165,05	01/09/2024
TESOURO SELIC 2027	SELIC + 0,2493%	R$ 110,54	R$ 11.054,30	01/03/2027
TESOURO IPCA+ 2026	IPCA + 5,07%	R$ 59,86	R$ 2.993,04	15/08/2026
TESOURO IPCA+ 2035	IPCA + 5,18%	R$ 38,37	R$ 1.918,85	15/05/2035
TESOURO IPCA+ 2045	IPCA + 5,18%	R$ 34,78	R$ 1.159,62	15/05/2045
TESOURO IPCA+ com juros semestrais 2030	IPCA + 5,10%	R$ 40,77	R$ 4.077,42	15/08/2030
TESOURO IPCA+ com juros semestrais 2040	IPCA + 5,21%	R$ 41,94	R$ 4.194,93	15/08/2040
TESOURO IPCA+ com juros semestrais 2055	IPCA + 5,28%	R$ 42,14	R$ 4.214,18	15/05/2055

Fonte: Tesouro Direto, 2021.

Observamos pela tabela que existem opções de investimentos com taxas pré-fixadas e pós fixadas, além de diferentes prazos de vencimentos e diferentes fluxos de remuneração. Quando explicitado "com juros semestrais", isso significa que os juros são pagos semestralmente, ficando para a data de vencimento apenas a devolução do valor investido e os juros do último semestre de investimento.

Vale ressaltar que liquidez diária dessa modalidade de investimento garante que o investidor consiga resgatar o dinheiro a qualquer momento, mas o rendimento pré-acordado é garantido apenas se o título permanecer até a data de vencimento. Se o investidor optar em retirar seu dinheiro antes da data de vencimento, o título será vendido no mercado e o investidor receberá o valor que o mercado está pagando naquele momento.

Diferentemente da Poupança, os títulos do Tesouro Direto não possuem garantia pelo FGC, mas ainda são tidos como os investimentos mais seguros do país, pois são garantidos pelo

Tesouro Nacional, uma vez que o emissor é o próprio governo. Outra diferença em relação a Poupança é a incidência de impostos. Para títulos do Tesouro Direto, há Imposto de Renda (IR) regressivo sobre o rendimento, e seu comportamento é dado de maneira inversa ao tempo de investimento, de acordo com a instrução normativa da Receita federal do Brasil, nº 1.585[14], mostrado pela Tabela 11.

Tabela 11 - Imposto de Renda Regressivo

Imposto de Renda	Tempo (dias)
22,5%	Até 180
20%	181 até 360
17,5%	361 até 720
15%	721 em diante

Fonte: a autora, 2021.

Além do Imposto de Renda, há também a possibilidade de incidência do IOF, no caso de haver um resgate do título antes de 30 dias de sua aplicação. O Imposto de Renda e o IOF são descontados pelo banco ou pela corretora automaticamente no resgate antecipado ou no vencimento do título. Em relação aos bancos e às corretoras, é importante ressaltar que as aplicações em títulos do Tesouro Direto precisam sempre ser intermediadas por um deles.

No site da plataforma do programa é possível acompanhar os investimentos, consultar saldos e extratos. O site do Tesouro Direto também disponibiliza um simulador de investimentos[15], o qual é explorado no trabalho de Gomes (2020) de acordo com suas potencialidades.

4.3.3 CDB

Os Certificados de Depósito Bancários são títulos privados no qual o aplicador empresta seu dinheiro para algum banco em troca de uma remuneração em forma de juros. Dessa forma, os bancos captam dinheiro a fim de financiar suas atividades, tais como empréstimos e financiamentos.

As taxas de juros dos CDBs podem ser pré-fixadas ou pós-fixadas, sendo comum a indexação pela taxa CDI. Além disso, os juros propostos para remunerar a aplicação são definidos de acordo com a necessidade de caixa do banco. Cerbasi (2019) afirma que

---

[14] http://normas.receita.fazenda.gov.br/sijut2consulta/link.action?idAto=67494&visao=anotado
[15] https://www.tesourodireto.com.br/simulador/

> Bancos que gozam de grande credibilidade desfrutam de enxurradas de recursos de seus clientes aplicadores e, por isso, oferecem taxas menos atrativas em seus CDBs. Bancos de menor porte, chamados de segunda linha, têm um número reduzido de clientes e, por isso precisam se esforçar para captar seus recursos, oferecendo juros normalmente mais elevados em seus CDBs. Taxas muito acima de 100% do CDI significam que você está aplicando recursos em um banco que tem dificuldades de captação para cobrir os empréstimos que concede. (CERBASI, 2019, p. 141)

Assim como a Poupança, o CDB conta com a proteção do FGC, e dessa forma, se a instituição que imitiu o CDB declarar falência, o dinheiro do investidor, dentro das condições do Fundo, estará assegurado.

Diferentemente da Poupança, os CDBs possuem uma aplicação mínima, sendo em sua grande maioria no valor de R$ 1.000,00 reais, podendo ainda haver uma quantidade mínima de compra pelos bancos (PRADO, 2018).

Para ter acesso a esses títulos, é necessário possuir uma conta corrente em banco ou corretora, assim como no Tesouro Direto. Outro ponto em comum em relação ao Tesouro Direto, são as tributações. Só há incidência de IOF em investimentos que duram menos de 30 dias e, no momento de resgate haverá incidência do imposto de renda regressivo, assim como apresentado pela Tabela 10. Além dos impostos, pode haver também um segundo custo, sendo este a taxa de administração cobrada por alguns bancos e corretoras.

Em relação à liquidez, os CDBs possuem um período de carência, isto é, período em que o dinheiro ficará retido pela instituição financeira e não será possível realizar o resgate. Dessa forma, títulos do CDB não são uma boa opção para investir uma reserva de emergência.

Exemplo 4.8: Um título privado do CDB de valor R$ 3.000,00 está disponível no mercado com vencimento em 750 dias com taxa pós-fixada de 120% do CDI. Sabe-se que nesse período a taxa CDI foi de 6,35% a.a.

a) Qual será o valor líquido resgatado no vencimento?
b) Considerando que a inflação, medida pelo índice IPCA, foi de 6% a.a., qual a taxa real de rendimento?

<u>Resolução:</u>

a) Para descobrirmos o valor líquido resgatado será necessário primeiramente descobrir a taxa de juros incidente sobre o capital, o valor bruto final e a alíquota cobrada pelo IR.

I. **Taxa de Juros:** Como a taxa é pós-fixada, temos que foi 120% de 6,35%, logo $1{,}20 \cdot 6{,}35\% = 7{,}62\%\ a.a.$

II. **Valor Bruto Final:** Pela fórmula do cálculo do montante no regime de juros compostos (3.13) temos

$M = 3.000(1 + 0,0762)^{\frac{750}{365}} = 3.495,27$ reais.

III. **Imposto:** Como o período de investimento é superior a 720 dias, será retido 15% de IR sobre o rendimento. Daí, $0,15 \cdot 495,27 = 74,29$ reais.

IV. **Valor líquido:** Daí o valor líquido resgatado no vencimento será de $3.495,27 - 74,29 = 3.420,98$ reais.

b) Considerando uma inflação de 6% a.a., e utilizando a fórmula de Fisher, equação 4.3, a taxa real de rendimento foi de

$$i_r = \frac{1 + i_a}{1 + i_i} - 1 = \frac{1,0762}{1,06} - 1 \approx 0,0152830 \approx 1,53\%\ a.a.$$

ou

$$i_r \approx i_a - i_i = 7,62\% - 6\% = 1,62\%\ a.a..$$

4.3.4 Debêntures

"Empresas lucram ao injetar recursos em sua atividade, para produzir bens e serviços e vende-los a um preço maior do que custaram" (CERBASI, 2019, p. 144). Entre as diversas formas de uma empresa captar recursos estão as debêntures, títulos emitidos por instituições privadas, que por serem títulos, não dão direito aos lucros ou aos bens da empresa. "Assim, os compradores de debêntures são os credores das empresas e em troca do empréstimo, recebem juros no prazo determinado na emissão desses títulos" (PRADO, 2018, p. 46).

Com relação aos riscos, as debêntures não possuem nenhuma garantia, podendo haver a possibilidade da empresa não conseguir, por diversos fatores, devolver o valor investido. A remuneração pode ser feita de forma pré-fixada ou pós-fixada, e hoje é possível investir em debêntures com valores a partir de R$ 1 mil reais, e quanto mais consolidada for a empresa no mercado, maior será o capital inicial exigido. (CERBASI, 2019; PRADO, 2018).

As debêntures não permitem resgate antes da data de vencimento, mas caso seja do interesse do investidor, há a possibilidade de renegociação no mercado, dependendo exclusivamente do desejo de outro comprador, motivo pelo qual os títulos de grandes empresas têm maior liquidez.

Em relação aos impostos, o sistema de arrecadação de impostos para as debêntures é similar ao do Tesouro Direto e do CDB, com exceção das debêntures incentivadas que são isentas de importo de renda para o investidor pessoa física. Tal situação é uma ação do governo federal que visa estimular o investimento em obras ou serviços de infraestrutura no Brasil (CERBASI, 2019).

4.3.5 LCI/LCA

A Letra de Crédito Imobiliário (LCI) e a Letra de Crédito do Agronegócio (LCA) são títulos de funcionamento similar ao CDB, com prazos de vencimentos variados e rentabilidade normalmente pós-fixada. Os recursos captados pelo emissor do título são utilizados para o financiamento de imóveis, no caso do LCI, ou para o financiamento de atividades no setor agrícola, no caso do LCA.

Dessa forma, com o intuito de estimular a construção de moradias e empreendimento e a expansão da atividade agrícola, esses títulos são totalmente isentos de imposto de renda para a pessoa física. Outro fator que torna essa modalidade de investimento ainda mais atrativa é o fato de que também possui cobertura pelo FGC.

Para finalizarmos essa parte de Renda Fixa, gostaríamos de ressaltar que existem também outras modalidades de investimento em Renda Fixa que não foram abordadas aqui nesse trabalho, pois optamos por trazer para discussão apenas as mais comuns no mercado. A Tabela 12 apresenta, de maneira simplista, um comparativo entre esses tipos de investimentos de Renda Fixa.

Tabela 12 - Comparação entre os tipos de investimentos

	Acessibilidade	**Liquidez**	**Garantias**	**Imposto**	**Proteção conta inflação**
Caderneta de Poupança	Plataforma de renda fixa de corretoras ou de bancos	Pode ser resgatado a qualquer momento sem perdas	FGC	Isenta	Não
Debêntures --- **Debêntures Incentivadas***	Plataforma de renda fixa de corretoras ou de bancos	Não pode ser resgatado antes do vencimento	Sem garantias	Segue tabela regressiva de imposto --- Isenta*	Apenas os títulos pós-fixados
CDB	Plataforma de renda fixa de corretoras ou de bancos	Pode ser resgatado antes do vencimento, podendo haver perdas com o resgate antecipado	FGC	Segue tabela regressiva de imposto	Apenas os títulos pós-fixados
LCI/LCA	Plataforma de renda fixa de corretoras ou de bancos	Não pode ser resgatado antes do vencimento	FGC	Isenta	Apenas os títulos pós-fixados
Tesouro Direto	Plataforma de renda fixa de corretoras ou de bancos	Pode ser resgatado antes do vencimento, podendo haver perdas com o resgate antecipado	Tesouro Nacional	Segue tabela regressiva de imposto	Apenas os títulos pós-fixados

Fonte: Prado, 2018, adaptado.

4.4 Investimentos em Renda Variável

> Diferentemente do que acontece nos investimentos de renda fixa, em que o lucro é pactuado entre tomadores e aplicadores durante um prazo conhecido, nos investimentos de renda variável o lucro é determinado pela diferença entre o preço de venda, mais os benefícios (dividendos, no caso das ações, ou aluguéis, no caso de imóveis), e o preço de compra. O nome renda variável vem justamente da incerteza em relação aos ganhos futuros decorrentes do risco em relação ao futuro desse tipo de investimento. (CERBASI, 2019, p. 158)

Na Renda Variável estão contidas todas as aplicações nas quais os cálculos de juros não são conhecidos no momento da aplicação, pois a remuneração dos ativos depende das variações no mercado financeiro. Investimentos em renda variável costumam ser mais arriscados que investimentos em renda fixa, no entanto, a expectativa de retorno é maior.

No mercado de renda variável, as transações são feitas pela bolsa de valores, um "ambiente eletrônico de negociação que recebe, por meio das corretoras de valores, ordens de compra e venda enviadas pelos investidores, pela internet ou por meio da mesa de operações das corretoras" (BRASIL, 2013, p. 150). Hoje, o ambiente responsável por controlar essas transações é a B3, e em seu sítio eletrônico[16] são disponibilizados cursos gratuitos sobre investimentos, principalmente em Renda Variável. Esses cursos são importantes, uma vez que para e investir em Renda Variável – e em Renda Fixa – é importante que o investidor tenha conhecimento sobre economia, mercado e empresas.

A seguir, apresentamos alguns tipos de investimentos em Renda Variável.

4.4.1 Ações

As ações são títulos negociáveis que representam uma fração do capital social de uma empresa. Diferentemente das debêntures, na qual você empresta dinheiro para uma empresa, ao comprar uma ação de uma empresa, você se torna coproprietário dela.

> Comprar ações é adquirir o direito de participar do sucesso – e também do insucesso – de empresas que optam por abrir seu capital a investidores anônimos[17]; quanto melhor o desempenho das empresas, mais as ações se valorizam e maior é a participação nos lucros (dividendos) recebida pelos acionistas. (CERBASI, 2019, p. 158-159)

O termo acionista é dado a quem possui ações de uma empresa, e essa ação pode ser vendida em qualquer momento pelo acionista na bolsa de valores. (PITZER, 2018). Ao investir

---

[16] https://www.b3.com.br/pt_br/

[17] Daí o nome de Sociedades Anônimas (S/As)

no mercado de ações, esperasse um rendimento a longo prazo, sendo este um dos princípios que difere um investidor de um *trader*.

Cerbasi (2019) aponta que investidores compram o que as ações representam: um pedaço da propriedade de alguma empresa, com o intuito de se tornarem de fato um coproprietário. E, mesmo que o mercado de ações oscile, o investidor mantém o investimento a longo prazo baseado em seus estudos e conhecimentos da empresa em que se tornou um acionista. Já o *trader* não tem interesse em ser coproprietário da empresa, o foco do *trader* é o preço das ações, e por isso são conhecidos como pessoas que realizam transações de compra e venda de ativos na bolsa de valores com objetivo de ganhos a curto prazo.

Nesse sentido, Raisse e Hilgert (2009) apontam que para um investidor

> a forma mais segura de conseguir bons retornos investido em ações é comprar papéis de empresas bem geridas, que apresentem lucros sólidos e crescentes, e não ter pressa de vende-las. O investidor deve buscar critérios de avaliação de empresas para analisar seus fundamentos e não se preocupar com as oscilações de curto prazo das cotações das suas ações (volatilidade). O risco no investimento em ações é justamente vender por preços "injustos" (mais baixos) num momento de volatidade, o que é normal em um mercado de alta liquidez. (p. 16)

O investidor e o *trader* também devem atentar-se às taxas cobradas na compra e na venda das ações, sendo estas, segundo Vieira (2016) *apud* Pitzer (2018), as taxas de corretagem, as taxas de emolumentos, a taxa de custódia e o Imposto de Renda. Geralmente, há maior tributação quando as compras e vendas são feitas em um curto período de tempo.

A seguir trazemos as Figuras 20 e 21, que mostram a variação no preço das ações de duas grandes empresas brasileiras em um período 5 anos, sendo elas a Magazine Luiza (MGLU3) e Petrobrás (PETR4) respectivamente. Em seguida, apresentamos dois exemplos de questões que abordam a temática de ações.

Figura 20 - Valor ações MGLU3

Fonte: Google Finanças, 2021.

Figura 21 - Valor ações PETR4

Fonte: Google Finanças, 2021.

Exemplo 4.9: Uma ação custava R$ 27,00 e passou por aumentos sucessivos de 4,2%, 10,5% e -2,7% em três meses. Ao final do terceiro mês, qual o valor da ação?

<u>Resolução:</u> A tabela 13 a seguir apresenta as taxas de aumento e seus respectivos fatores de aumento. Daí, pela fórmula de aumentos e descontos sucessivos (3.1), tem-se:

$27 \cdot (1 + 0{,}042) \cdot (1 + 0{,}105) \cdot (1 - 0{,}027) = 27 \cdot 1{,}042 \cdot 1{,}105 \cdot 0{,}973 \approx 30{,}25$ reais.

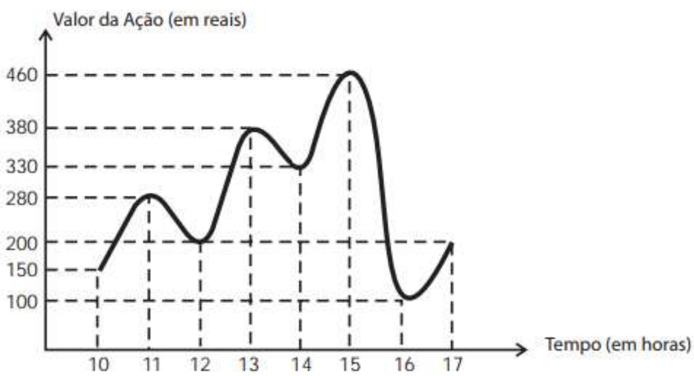
Tabela 13 – Aumentos sucessivos (Exemplo 4.9)

Aumento	Fator de aumento
4,2%	1,042
10,5%	1,105
-2,7%	0,973

Fonte: a autora (2021).

Exemplo 4.10: (ENEM/2012) O gráfico fornece os valores das ações da empresa XPN, no período das 10 às 17 horas, num dia em que elas oscilaram acentuadamente em curtos intervalos de tempo.

Figura 22 - Questão ENEM/2012



Fonte: INEP, 2021

Neste dia, cinco investidores compraram e venderam o mesmo volume de ações, porém em horários diferentes, de acordo com a seguinte tabela.

Figura 23 - Questão ENEM/2012

Investidor	Hora da Compra	Hora da Venda
1	10:00	15:00
2	10:00	17:00
3	13:00	15:00
4	15:00	16:00
5	16:00	17:00

Fonte: INEP, 2021.

Em relação ao capital adquirido na compra e venda das ações, qual investidor fez o melhor negócio?

<u>Resolução:</u> Considere a Tabela 14 abaixo.

Tabela 14 - Resolução Questão ENEM/2012

Investidor	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Compra	R$ 150	R$ 150	R$ 380	R$ 460	R$ 100
Venda	R$ 460	R$ 200	R$ 460	R$ 100	R$ 200
Lucro **(Venda – Compra)**	R$ 310	R$ 50	R$ 80	R$ -360	R$ 100

Fonte: a autora, 2021.

E, portanto, o investidor que fez o melhor negócio foi o investidor 1, uma vez que obteve maior lucro em suas negociações.

4.4.2 Fundos de Investimentos

Fundos de investimentos são instituições financeiras representadas por pessoas jurídicas que reúnem recursos financeiros de um conjunto de investidores, e os utilizam para investir em alguma modalidade financeira a fim de obter um retorno (PRADO, 2018).

Cerbassi (2019, p. 196) aponta que os fundos são

> Bom negócio para quem tem disciplina para investir, mas não tem tempo ou conhecimento para selecionar e aprender sobre investimentos. Funcionam como uma espécie de condomínio, em que os proprietários – chamados de cotistas – que adquirem cotas desse condomínio confiam ao gestor as decisões sobre o que comprar, quando comprar e quando vender. [...] Por funcionarem na forma de condomínio, os fundos permitem que vários pequenos investidores se unam para, em conjunto, formarem estratégias de investimento que seriam inviáveis para cada investidor individualmente.

Os gestores do fundo são uma equipe de especialistas no mercado financeiro, e por esse motivo, são cobradas taxas de administração, podendo, ainda, ser cobrada uma taxa de performance em determinados casos quando o desempenho obtido é acima da meta. Importante ressaltar que a taxa de administração é descontada sobre o patrimônio líquido e não apenas sobre o rendimento.

A diversidade dos tipos de fundos é grande, oferecendo estratégias para todo tipo de investidor. Existem fundos de ações, fundos de renda fixa, fundos cambiais, fundos imobiliários, fundos multimercados, fundo de índices de ações (ETFs).

Exemplo 4.11: O BOVA11 é um fundo de índice que apresenta rentabilidade semelhante ao Ibovespa (IBOV), que é o principal indicador de desempenho das ações negociadas na B3 e reúne as empresas mais importantes do mercado de capitais brasileiro.

Bruno decidiu comprar R$ 1.500,00 na ETF do BOVA11, e após 2 anos, revendeu-as por R$ 1.658,25. Nessas condições, determine a taxa anual aproximada de rendimento desse fundo.

Resolução: Vamos determinar inicialmente a taxa I de rendimento total nesse período de 2 anos. Para isso, faremos a razão do valor das ações vendidas e compradas,

$$\frac{1.658,25}{1.500} = 1,1055 = 110,55\%.$$

Daí, temos que a taxa I de rendimento total nesse período é

$$I = 110,55\% - 100\% = 10,55\%.$$

Agora, chamando i da taxa média anual de rendimento desse fundo, temos para o tempo $t = 2$ anos, $(1+i)^2 = 1 + I$, daí

$$(1+i)^2 = 1 + 10,55\% \Rightarrow (1+i)^2 = 1,1055 \Rightarrow 1 + i \approx 1,0514 \Rightarrow i \approx 5,14\%\,.$$

4.4.3 Criptomoedas

O mercado emergente das criptomoedas é outro exemplo de investimento, que tem crescido consideravelmente nos últimos anos. As criptomoedas são moedas digitais, funcionam como um dinheiro de troca, totalmente, de forma eletrônica e o princípio é o mesmo de todas as moedas: comprar ou pagar por determinados serviços ou bens. (PITZER, 2018).

Machado (2017) indica que entre as facilidades prometidas pelas criptomoedas estão a rapidez do processo, a inexistência de burocracia e a confiabilidade. Essas moedas são descentralizadas, ou seja, não possuem um órgão emissor central e, por isso, não dependem e nem são administradas pelo governo. O autor também aponta que todas as transações feitas com as criptomoedas são registradas por um mecanismo chamado *Blockchain*[18].

O *Blockchain* é uma tecnologia de cadeia de blocos de informações que necessitam de seus anteriores para serem válidos, e por isso, essa tecnologia é extremamente segura. Pitzer (2018) compara o *Blockchain* a um livro bancário em um banco, que tem todas as informações de todas as transações, mas como os usuários são anônimos, ninguém sabe quem realizou a transação.

Há duas formas de se obter uma criptomoeda, recebê-la por meio de uma transação, realizada por meio de sites destinados ao câmbio de criptoativos, ou descobri-la pelo processo

[18] Traduzindo para o português: corrente de blocos.

chamado de mineração (MACHADO, 2017). A mineração é o ato de decifrar um problema matemático por meio computacional, e quem conseguir primeiro, ganha um lote de criptomoedas. No entanto, para decifrar tais problemas é necessário investir em uma rede de computadores altamente desenvolvidos. (PITZER, 2018).

O valor de uma criptomoeda é dado por ações de compra e venda no mercado. “A conversão de criptomoedas em dinheiro é feita por empresas chamadas de corretoras. Os clientes que desejam comprar moedas fazem o depósito de dinheiro e recebem o crédito equivalente.” (MACHADO, 2017, s/p).

Como exemplo de criptomoedas tem-se, a mais famosa, Bitcoin que “surgiu em meados de 2008, valendo em torno de 60 mil reais em 2020, chegando aos incríveis 350 mil reais em 2021” (RICO, 2021, s/p). Além da Bitcoin, existem também a Ethereum, Dogecoin, Litecoin entre outras.

Figura 24 - Cotação Bitcoin

Fonte: Google Finanças, 2021.

A Figura 24 mostra a cotação do Bitcoin comparado com o real nos últimos 5 anos. Observe que é um ativo que valorizou muito nesses últimos 2 anos, isso porque é uma moeda muito sensível as variações do mercado, se tornando assim um ativo muito volátil, isto é, seu preço oscila muito durante um determinado período de tempo.

Neste capítulo foram apresentados a definição de investimentos, suas diferentes modalidades e funcionamento e a abordagem desses conceitos na Educação Básica. No capítulo seguinte apresentaremos a metodologia de pesquisa e o contexto no qual esta foi desenvolvida.

5 METODOLOGIA E CONTEXTO DE PESQUISA

Uma pesquisa científica surge das inquietações do pesquisador sobre determinada situação e/ou assunto, e se estabelece pela busca de respostas a essas inquietações. Goldenberg (2004) afirma que pesquisa é "a construção de conhecimento original, de acordo com certas exigências científicas. É um trabalho de produção de conhecimento sistemático, não meramente repetitivo, mas produtivo, que faz avançar a área de conhecimento a qual se dedica" (p. 105). Nesse sentido, esta pesquisa de mestrado surgiu diante de nosso entendimento da importância de se inserir, na Educação Básica, discussões sobre questões envolvendo Educação Financeira e Investimentos Financeiros, de acordo com as orientações da BNCC (BRASIL, 2018).

Este capítulo e dedicado à metodologia e ao contexto de pesquisa, sendo dividido em três seções. Na primeira descrevemos a pesquisa qualitativa e suas características. A segunda seção dedicamos à definição de sequência didática que norteou o produto educacional elaborado durante esta pesquisa. E por fim, na última seção apresentamos o contexto em que foi desenvolvido o produto educacional.

5.1 Pesquisa Qualitativa

A pesquisa aqui apresentada é de natureza qualitativa, pois entendemos que essa modalidade de pesquisa é a que mais favorece a busca pela resposta a nossa questão de pesquisa. Lembrando que o objetivo desse trabalho e pesquisa é construir uma sequência didática que aborde a teoria de investimentos financeiros para alunos do 9º ano do Ensino Fundamental e investigar se tal sequência contribui para a educação financeira desses estudantes.

Gerhardt e Silveira (2009) apontam que a pesquisa qualitativa se preocupa "com aspectos da realidade que não podem ser quantificados, centrando-se na compreensão e explicação da dinâmica das relações sociais" (p. 32). Durante uma pesquisa qualitativa, o conhecimento se (re)constroi constantemente na relação entre os sujeitos de pesquisa e o pesquisador, sem se preocupar com a representatividade numérica dos dados e instrumentos estatísticos como em pesquisas quantitativas (PAGANI, 2016). Nesse sentido, Goldenberg (2004) aponta que

> Os dados qualitativos consistem em descrições detalhadas de situações com o objetivo de compreender os indivíduos em seus próprios termos. Estes dados não são padronizáveis como os dados quantitativos, obrigando o pesquisador a ter flexibilidade e criatividade no momento de coletá-los e analisá-los. (p. 53)

São características da pesquisa qualitativa a objetificação do fenômeno e a hierarquização das ações de descrever, compreender e explicar (GERHARDT, SILVEIRA, 2009). Além disso, pesquisas realizadas de acordo com uma perspectiva qualitativa fornecem informações descritivas de forma a realçar o significado dado às ações. Nesse sentido, Bogdan e Biklen afirmam que

> A investigação qualitativa é descritiva. Os dados recolhidos em forma de palavras ou imagens e não de números. Os resultados escritos da investigação contêm citações feitas com base nos dados para ilustrar e substanciar a apresentação. Os dados incluem transcrições de entrevistas, notas de campo, fotografias, vídeos, documentos pessoais, memorandos e outros registros oficiais. Na sua busca de conhecimento, os investigadores qualitativos não reduzem as muitas páginas contendo narrativas e outros dados a símbolos numéricos. Tentam analisar os dados em toda a sua riqueza, respeitando, tanto quanto o possível, a forma em que estes foram registrados ou transcritos (BOGDAN; BIKLEN, 1991, p. 48)

Em nossa pesquisa, destacamos os seguintes métodos de coleta de dados: questionários, observação, diário de campo, vídeos (gravação dos encontros) e slides.

O questionário é um instrumento de coleta de dados muito utilizado para obter informações e constitui-se de questões abertas e/ou fechadas, as quais os participantes devem responder. Em nossa pesquisa, aplicamos dois questionários, contendo, em sua maioria, questões abertas, de maneira que os participantes pudessem se expressar livremente sobre o tema (GOLDENBERG, 2004).

Durante a coleta de dados desta pesquisa, o pesquisador assumiu um papel de observador participante uma vez que sua estratégia envolvia "não só a observação direta, mas todo um conjunto de técnicas metodológicas pressupondo um grande envolvimento do pesquisador na situação estudada" (LUDKE; ANDRÉ, 2014, p. 32).

Nesse sentido, em nossa pesquisa, registramos as impressões, os dados e os fatos em um diário de campo, que é um instrumento utilizado para registrar e organizar os dados coletados durante as etapas de observações. Esse recurso foi complementado com os vídeos dos encontros, que foram gravados, e os slides produzidos como material de apoio.

5.2 Sequência Didática

Entendemos sequência didática como "um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecido tanto pelos professores como pelos alunos" (ZABALA, 1998, p. 18). Pais (2002) afirma que "uma sequência didática é formada por um certo número de aulas planejadas e analisadas previamente com a finalidade de observar situações de aprendizagem, envolvendo os conceitos previstos na pesquisa didática” (p. 102)

A elaboração da sequência didática inicia-se no planejamento e organização de um plano de aula, conforme modelo apresentado na Figura 25. Nesse plano de aula ficam explícitos alguns elementos como título, público-alvo, objetivo geral, objetivos específicos, conteúdo, avaliação, bibliografia, entre outros. Vale ressaltar que, enquanto o plano de aula fica restrito a esses elementos, a sequência didática agrega o material de apoio ao plano de aula.

Figura 25 - Modelo de tabela de Plano de Aula

<table>
<tr><td colspan="6">Plano de aula para uma sequência didática</td></tr>
<tr><td colspan="6">Título</td></tr>
<tr><td colspan="6">Público-alvo</td></tr>
<tr><td colspan="2">Caracterização dos alunos</td><td colspan="2">Caracterização da escola</td><td colspan="2">Caracterização do ambiente escolar</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>Problematização</td><td colspan="5"></td></tr>
<tr><td>Objetivo geral</td><td colspan="5"></td></tr>
<tr><td colspan="6">Metodologia de ensino</td></tr>
<tr><td>Aulas</td><td>Objetivos específicos</td><td colspan="2">Conteúdo</td><td colspan="2">Dinâmica das atividades</td></tr>
<tr><td>1</td><td></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>2</td><td></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>3</td><td></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>Avaliação</td><td colspan="5"></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Bibliografia</td><td>Referencial teórico</td><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td>Material utilizado</td><td colspan="4"></td></tr>
</table>

Fonte: Guimarães e Giordan (2011) *apud* Souza (2020)

Para a aplicação e validação da sequência didática elaborada neste trabalho foram utilizados como referência algumas questões elaboradas por Zabala (1998), a fim de “reconhecer sua validade, mas, sobretudo, de nos facilitar pistas para reforçar algumas atividades ou acrescentar outras novas” (p. 63). Em resumo, essas questões evidenciam que numa sequência didática as atividades devem:

- Determinar os conhecimentos prévios dos alunos relativos aos conteúdos a serem propostos;
- Ser elaboradas de forma que os conteúdos sejam significativos e funcionais para os estudantes;
- Ser adequadas ao nível de desenvolvimento cognitivo dos alunos;
- Representar um desafio alcançável para o aluno, quer dizer, que levam em conta suas competências atuais e as façam avançar com a ajuda necessária;

- Provocar conflitos entre os conhecimentos de modo a estabelecer relação entre novos conhecimentos e os conhecimentos prévios;
- Estimular a autoestima e autoconceito em relação às aprendizagens propostas, ou seja, que o estudante possa sentir que aprendeu algo;
- Desenvolver habilidades com os alunos relacionadas com o “aprender a aprender”.

Considerando a metodologia e abordagem utilizadas nessa pesquisa, a seguir passamos a apresentar o contexto de pesquisa, considerando as condições em que a sequência didática foi desenvolvida.

5.3 Contexto de pesquisa

A sequência didática foi desenvolvida em junho de 2021, no formato de um minicurso extracurricular, acontecendo fora do horário de aula regular, para estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola da rede privada de Belo Horizonte - Minas Gerais. A coordenação e direção da escola aprovaram a proposta do minicurso, ajudando inclusive na divulgação para os estudantes.

Uma vez que aconteceria como atividade extracurricular, os estudantes interessados deveriam se inscrever para participar. Houve 62 inscritos para o minicurso, os quais foram divididos em duas turmas de 31 integrantes cada. No entanto, apenas uma turma foi considerada para as análises aqui apresentadas.

Os estudantes inscritos no minicurso já haviam aprendido o básico de Matemática Financeira, como porcentagens, porcentagens sucessivas, juros simples e juros compostos em suas aulas regulares de Matemática. No entanto, ainda não haviam aprendido funções e outros aspectos matemáticos que permitissem um aprofundamento do tema. Diante dessas condições, a sequência didática foi elaborada visando uma introdução aos conceitos necessários à investimentos financeiros.

Como a faixa etária dos alunos que participaram do minicurso é menor que 18 anos, foi solicitado previamente, aos participantes e aos seus respectivos responsáveis, o preenchimento do termo de Consentimento e Assentimento. Cientes de que todos as informações e participação dos estudantes seriam deixadas de maneira anônima, todos os participantes e seus respectivos responsáveis assinaram o termo. O modelo[19] desse termo foi adaptado para o modelo digital.

[19] Apêndice A – páginas 151 e 152

O minicurso foi elaborado para acontecer de maneira remota em quatro encontros síncronos, de uma hora e meia cada, por meio da plataforma *Microsoft Teams*. O modelo de ensino remoto foi estabelecido devido à pandemia da COVID-19, iniciada em 2020 e se estendendo ao ano de 2021.

Além dos encontros, os estudantes também foram convidados a responderem dois questionários, feitos por meio da ferramenta *Microsoft Forms*, dentro do ambiente virtual de aprendizagem da escola. O primeiro questionário, questionário inicial de sondagem[20], foi respondido pelos estudantes antes do primeiro encontro do minicurso, e buscava compreender os conhecimentos prévios dos estudantes em relação a temática. O último questionário, questionário final de *feedback*[21], buscava obter as impressões e avaliação dos estudantes em relação ao minicurso. Os questionários continham, em sua maioria, questões abertas, de maneira que os participantes pudessem se expressar livremente sobre o tema (GOLDENBERG, 2004).

A sequência didática, incluindo o material de apoio (slides) produzidos para o minicurso, compõe o produto educacional produzido nessa pesquisa de mestrado. No próximo capítulo será apresentado em detalhes esse produto, e discutido os dados obtidos durante a aplicação do produto educacional na escola.

[20] Apêndice B – páginas 153 e 154
[21] Apêndice C – páginas 155 e 156

6 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS

Esse capítulo foi dividido em cinco seções. Na primeira apresentamos o plano de aula e o material de apoio desenvolvido para a sequência didática elaborada. Em seguida, a segunda seção é destinada à análise dos resultados do questionário inicial de sondagem, que buscou traçar um perfil de conhecimento prévio dos estudantes sobre o tema de finanças. A terceira seção é destinada a análise das discussões levantadas durante os encontros e, na quarta seção é analisado o resultado do questionário final de *feedback*. Essas seções servirão de base para verificar se a sequência didática desenvolvida de fato contribuiu para a Educação Financeira dos estudantes, o que será discutido na quinta e última seção desse capítulo.

Durante as análises, os estudantes foram nomeados por meio dos numerais 1, 2, 3, ..., 31, de maneira a preservar a identidade dos participantes. No entanto, vale ressaltar que as análises das falas dos estudantes não têm como objetivo investigar o desenvolvimento pessoal de cada participante, mas sim do grupo como um todo.

As análises têm como objetivo verificar se sequência didática produzida contribuiu para o desenvolvimento da Educação Financeira dos participantes, para isso, serão apuradas as discussões levantadas durante os encontros. Dessa forma, ao longo desse capítulo, serão apresentadas e discutidas as falas diretas dos estudantes, as quais se encontraram em itálico.

6.1 Proposta de Sequência Didática

Nesta seção será apresentada a sequência didática que compõe esse trabalho, sendo mostrado o plano de aula elaborado para cada encontro incluindo os objetivos específicos, tempo de duração, equipamentos de apoio, atividades propostas e habilidades da BNCC. Vale ressaltar, que para essa atividade, uma vez que esta ocorria fora do horário de aula regular, nos baseamos também em habilidades da BNCC previstas para o Ensino Médio, no entanto, adaptadas para o nível escolar do público-alvo, sendo estes estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental.

Além desse plano de aula, a sequência didática incluí também o material de apoio elaborado para a condução dos encontros. Esse material foi montado por meio de slides e faz parte do produto educacional proposto por esse trabalho de dissertação. Ao longo das análises dos resultados apresentadas na seção 6, serão feitos alguns recortes desses slides. No entanto, para acessá-los na íntegra, basta clicar no link compartilhável:

https://drive.google.com/drive/folders/1wZ1jGYn0EsTLos5dZeiLHQLFrlUB0ePK?usp=sharing

O Quadro 4 apresenta as temáticas centrais de cada encontro do minicurso. A escolha dessas temáticas de cada encontro se deu pensando em um desenvolvimento crescente em relação ao tema de Educação Financeira e Investimentos Financeiros.

Para o primeiro encontro foram selecionadas as temáticas de *Educação Financeira (EF), Matemática Financeira (MF), Juros e Calculadora do Cidadão.* Dessa forma poderíamos introduzir a diferença entre EF e MF, seguindo para uma revisão do conceito de Juros, por meio de uma conexão didática com as aulas regulares de matemática, e um aprofundamento da temática utilizando-se a Calculadora do Cidadão.

No segundo encontro foram selecionadas as temáticas *Calculadora do Cidadão, Taxa Selic, Inflação e Rendimento real de um investimento.* A Calculadora do Cidadão continuará sendo explorada nesse encontro, e em seguida seria apresentado e discutidos alguns conceitos como a Taxa Selic, Inflação e a Taxa de rendimento real de um investimento. Esses conceitos são extrema importância para se compreender o cenário econômico nacional e os rendimentos dos investimentos, como já apresentado no capítulo 4.

No terceiro e quarto encontro foram selecionados temáticas em relação ao conceito de investimentos e suas diferentes modalidades, tanto em renda fixa quanto em renda variável.

Quadro 4 - Temáticas de cada encontro

Encontro 1
• Educação Financeira e Matemática Financeira • Juros Simples e Juros Compostos • Calculadora do Cidadão
Encontro 2
• Calculadora do Cidadão • Taxa Selic • Inflação • Taxa de rendimento real de um investimento
Encontro 3
• Investimentos Financeiros • Tipos de Investimentos em Renda Fixa
Encontro 4
• Investimentos Financeiros • Tipos de Investimentos em Renda Variável • Risco, retorno e liquidez de um investimento

Fonte: a autora, 2021.

<u>Encontro 1</u>

• **Tema:** Educação Financeira e Matemática Financeira

• **Tempo de duração:** 1 hora 30 minutos

• **Recursos utilizados:** Software PowerPoint, Software Mentimeter e Calculadora do Cidadão

• **Habilidades BNCC:** EF09MA05; EM13MAT303; EM13MAT203.

• **Desenvolvimento e atividades:**

<u>1º momento:</u> Com objetivo de fomentar a discussão sobre a importância da Educação Financeira, será proposto a elaboração de uma "nuvem de palavras" na qual os estudantes deverão escrever as palavras que vem à cabeça quando pensam em Educação Financeira. Para essa atividade será utilizado o Software Mentimeter. Com objetivo de voltamos o minicurso para investimentos financeiros, inicialmente será importante discutir sobre como os estudantes lidam com o dinheiro, e a partir dessa discussão levantar a importância de um consumo consciente e a finalidade de uma poupança financeira. Por fim será levantado a discussão sobre a diferença entre Educação Financeira e Matemática Financeira.

<u>2º momento:</u> Com objetivo de fazer uma conexão e aprofundamento do que os estudantes já viram nas aulas regulares de matemática, será retomado os conceitos de juros simples e juros compostos, focando em suas aplicações e utilidades. A abordagem desses conceitos será feita sem o uso de funções, uma vez que os estudantes ainda não aprenderam esse conteúdo. Como atividade será proposto a discussão do impacto que os juros compostos podem oferecer a quem investe.

<u>3º momento:</u> Apresentação da Calculadora do Cidadão como um recurso importante para auxiliar nos cálculos financeiros. Nesse primeiro encontro será explorado a ferramenta do "Valor futuro de capital", como atividade propomos uma da discussão da metodologia utilizada por detrás dos cálculos feitos pela calculadora e resolução de problemas envolvendo o uso da calculadora.

<u>Encontro 2</u>

• **Tema:** Taxa Selic, Inflação e Taxa de rendimento real

• **Tempo de duração:** 1 hora 30 minutos

• **Recursos utilizados:** Software PowerPoint; Calculadora do Cidadão; Youtube.

• **Habilidades BNCC:** EM13MAT104; EM13MAT203.

• **Desenvolvimento e atividades:**

1º momento: Com objetivo de aprofundar em situações de uso dos juros compostos, inicialmente propusemos uma sequência de problemas que explorassem a ferramenta "Aplicação com depósitos regulares". O aprofundamento matemático dessa ferramenta não será proposto uma vez que os alunos ainda não estudaram progressões geométricas.

2º momento: Com objetivo de apresentar conceitos básicos da economia, será posto diferentes manchetes de jornais para instigar os estudantes a investigarem a existência de uma taxa básica de juros. Além disso, será discutido o que os estudantes entendem como inflação e quais suas consequências para a economia brasileira. Será proposta uma situação-problema que faça uso da ferramenta "Correção de Valores" da Calculadora do Cidadão.

3º momento: Apresentação de manchetes de jornais sobre o rendimento real da Caderneta de Poupança, de maneira a contribuir para a discussão sobre o que significa uma taxa real de rendimentos. Como atividade será proposto que os estudantes escrevam alguma sentença matemática que relacione a taxa real de rendimento, a taxa de rendimento nominal e taxa de inflação. Por fim, passaremos o vídeo *Quão rico você seria se viajasse no tempo?*[22] do canal Nerdologia.

Encontro 3

- **Tema:** Investimentos Financeiros e Renda fixa
- **Tempo de duração:** 1 hora 30 minutos
- **Recursos utilizados:** Software PowerPoint; Simulador Tesouro Direto
- **Habilidades BNCC:** --
- **Desenvolvimento e atividades:**

1º momento: Os principais objetivos desse primeiro momento são compreender o conceito de investimentos e investimentos financeiros e, fomentar e iniciar a discussão sobre a importância de se investir, considerando o que já foi estudado e apresentado nos encontros anteriores. E, uma vez que o minicurso se destina a estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental, também será apresentado as condições necessárias para que um menor de idade inicie seus investimentos.

2º momento: Inicialmente será discutido o que significa investimentos em renda fixa e depois será propostos uma atividade em que os estudantes devem associar o tipo de investimento em renda fixa e sua característica fundamental. Além disso, será apresentado o FGC que ajudará o estudante a decidir, por meio de uma situação-problema, qual o melhor investimento

[22] Disponível pelo link: https://www.youtube.com/watch?v=m5pTiiwnukk&ab_channel=Nerdologia

apresentado, considerando remuneração, imposto e garantias. E por último será discutido porque o Tesouro Direto é considerado o investimento mais seguro do país e os estudantes serão convidados a explorar a ferramenta do simulador do Tesouro Direto.

Encontro 4

• **Tema:** Investimentos Financeiros e Renda variável

• **Tempo de duração:** 1 hora 30 minutos

• **Recursos utilizados:** Software PowerPoint

• **Habilidades BNCC: --**

• **Desenvolvimento e atividades:**

1º momento: Inicialmente será apresentado as características de um investimento em renda variável para posteriormente discutirmos as diferenças entre a modalidade de investimento em renda fixa e em renda variável. Em seguida, será apresentado os diferentes tipos de investimento em renda variável e proposto um exercício de análise de gráficos em relação ao valor de determinadas ações.

2º momento: Apresentação e discussão de diferentes conceitos importantes, como risco, retorno e liquidez de um investimento. Como atividade será proposto uma questão fechada da OBInvest 2021, que discute a relação entre risco e retorno de um investimento. Por fim, será apresentado os três perfis de investidor, para iniciar uma discussão sobre qual o perfil pessoal de cada estudante e se eles acreditam que esse perfil possa mudar durante a vida.

3º momento: Retomada dos principais conceitos estudados e fechamento do minicurso.

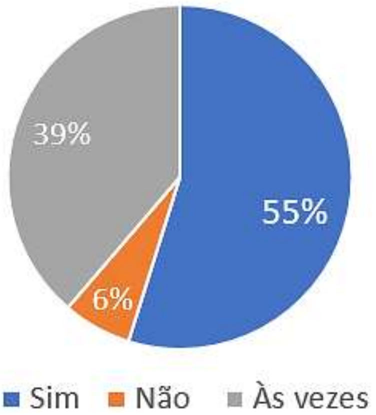
6.2 Questionário Inicial de Sondagem

Como recomenda Zabala (1998), a fim de determinar os conhecimentos prévios dos estudantes em relação a temas envolvendo Educação Financeira e Investimentos Financeiros, elaboramos um questionário inicial de sondagem, para qual os estudantes deveriam responder até antes do primeiro encontro do minicurso.

As respostas e informações coletadas nesse questionário de sondagem também poderiam colaborar com a abordagem dada à sequência didática durante o minicurso. O questionário proposto possui 15 questões sobre como eles lidam com dinheiro e sobre termos em relação ao tema, sendo 6 questões fechadas e 8 questões abertas.

Uma vez que a sequência didática foi aplicada à estudantes do 9° ano, do total de trinta e um, vinte e sete possuíam 14 anos, sendo que o restante possuía 13 ou 15 anos. Desses estudantes, 42% (13 alunos) recebem mesada e apenas 55% (17 alunos) costumam conversar sobre dinheiro com seus familiares, sendo que 39% (12 alunos) disseram que conversam às vezes e 6% (2 alunos) disseram que não conversam, o que está ilustrado no gráfico da Figura 26. Consideramos essa informação muito relevante, uma vez que a Educação Financeira deve ser incentivada, não apenas no ambiente escolar, mas também no ambiente familiar como aponta Oliveira *et al* (2014).

Figura 26 - Você costuma conversar sobre dinheiro com seus familiares?



Fonte: a autora, 2021.

Quando questionados em relação a sua postura pessoal em relação ao dinheiro, e se eles costumavam economizar o dinheiro que recebiam, fosse de mesada, dinheiro de presente, entre outros, 90% disseram que sim, 10% disseram que às vezes e nenhum estudante disse que não. No entanto, quando questionados onde costumam guardar esse dinheiro, 20 estudantes (65%) guardam seu dinheiro em instituições bancárias ou em uma corretora de investimentos, desses 20 estudantes, 7 guardam uma parte nessas instituições e a outra parte em casa. Os outros 11 estudantes (35%) disseram guardar o dinheiro apenas em casa, em sua carteira ou em um cofre.

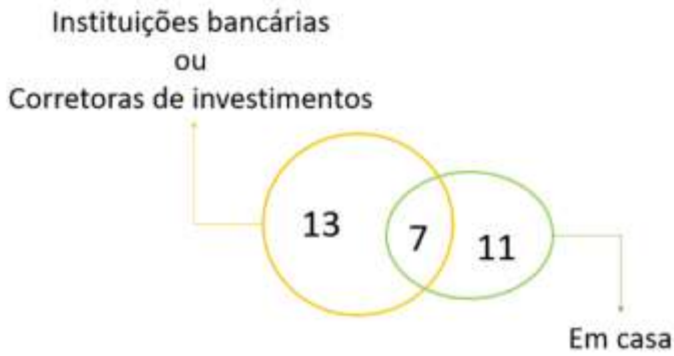
A Figura 27 representa um diagrama desses resultados obtidos. Além disso, destacamos as respostas dos estudantes 21, 17 e 7 que sintetizam o resultado obtido.

Estudante 21: *Guardo meu dinheiro em cotas de fundos imobiliários, fundo de investimentos e em títulos do tesouro.*

Estudante 17: *Uma parte dele vai para uma poupança, outra parte eu guardo em um cofrezinho que eu tenho.*

Estudante 7: *Costumo guardar em um potinho de metal, dentro do meu armário.*

Figura 27 - Diagrama dos resultados onde os estudantes "guardam" seu dinheiro



Fonte: a autora, 2021.

O fato de ainda ter muitos estudantes guardando o dinheiro em casa nos mostra que alguns ainda não compreendem os impactos da inflação neste dinheiro, considerando que pode diminuir seus respectivos poderes de compra. Acreditamos que esse resultado tem relação direta com a idade dos estudantes, pois por serem menores de idade, poucos possuem conta em banco e/ou corretora de investimentos. Além disso, até por questão de maturidade em relação ao dinheiro, alguns estudantes ainda são dependentes dos responsáveis para questões financeiras, como ilustra a resposta do Estudante 3: “*Geralmente entrego ao meu responsável para que o guarde em uma conta/poupança*”.

Em relação à conceitos de Educação Financeira, inicialmente os estudantes foram questionados se para eles a Educação Financeira é importante e todos os estudantes responderam que sim. Vale ressaltar que os participantes foram os estudantes que se inscreveram para o minicurso extraclasse e, por isso consideramos que todos que se inscreveram tenham interesse no assunto e, consequentemente, o consideram importante. De qualquer forma, acreditamos que esse resultado não iria variar muito independente do espaço amostral considerado, uma vez que a temática tem sido muito valorizada pelos jovens atualmente, como aponta Nunes e Pagani (2020).

Em seguida, foi pedido para que os estudantes escrevessem o que, para eles, é Educação Financeira. Alguns estudantes relacionaram Educação Financeira como algo presenta na vida adulta, a maioria dos estudantes relacionaram Educação Financeira a saber lidar e administrar o dinheiro. A exemplo, trazemos explicitamente as respostas do Estudante 16 e 25.

Estudante 16: *Educação Financeira é saber como lidar com seu dinheiro, tanto para investir quanto para gastar ou juntar*.

Estudante 25: *Para mim, Educação Financeira é uma área em que se estuda e administra tudo que envolve dinheiro. Por se tratar de um tipo de educação, acredito que se relaciona também à melhor forma de se administrar esse dinheiro, com consciência.*

A resposta do Estudante 25 está em conformidade pela definição proposta por Jacob (2000) *apud* Borges (2010). Ainda nessa linha de administração, outros estudantes disseram que Educação Financeira está relacionada a como administrar o dinheiro de maneira correta. No entanto, é interessante discutir com os estudantes que a Educação Financeira não é exata, sendo assim o termo "corretamente" pode variar de acordo com o contexto social e econômico de cada, além das características culturais e singularidades sociais de cada região em que vivem (MUNIZ, 2016).

Outra resposta interessante foi a do Estudante 19, na qual alegou que Educação Financeira é "*saber como funciona a vida de um adulto, nas questões tipo, financiar uma casa, parcelar compras, comprar ou pagar algo".* Essa resposta em específico nos chamou atenção, uma vez que o estudante associou Educação Financeira à vida de um adulto. No entanto, como a própria ENEF propõem, existe em seus programas ações voltadas para crianças e jovens com o intuito de promover a Educação Financeira desse público (BRASIL, 2011a, 2011b).

O Estudante 24 relacionou o conceito de Educação Financeira apenas no contexto de investimentos financeiros, como explicitado em sua resposta: "*Educação Financeira é o ensinamento sobre a parte geral de investimentos, por exemplo, ensinar como investir, ensinar os tipos de investimento e o que são, etc".* Acreditamos que essa resposta pode ter sido induzida pelo nome do minicurso no qual o estudante se inscreveu, que era "Educação Financeira e Investimentos.

Ainda em relação ao conceito de Educação Financeira, uma resposta interessante selecionada foi do Estudante 31: *"Penso que a Educação Financeira se refere ao conhecimento sobre investimentos, economia, organização de finanças, juros, além de fatores geopolíticos que interferem na situação econômica de cada região e no poder de compra das pessoas".* Essa resposta, em especial, nos mostra que o estudante consegue perceber, mesmo que de maneira simples, a relação da Educação Financeira com os quatro princípios apresentados por Muniz (2016).

Um desses princípios é o da Dualidade entre Educação Financeira (EF) e Matemática Financeira (MF), uma vez que ambas se relacionam e complementam-se. Nesse sentido, já era esperado que alguns estudantes associassem o conceito de Educação Financeira à Matemática Financeira. A seguir, explicitamos a resposta de dois estudantes que fizeram essa associação.

Estudante 23: *Para mim, a educação financeira irá nos ensinar um pouco mais sobre a matemática do dinheiro.*

Estudante 28*: Educação financeira para mim é o estudo de investimentos, gastos, impostos, proporções, razões, juros compostos e juros simples.*

É importante diferenciar essas duras vertentes, EF e MF, e, por isso, a próxima pergunta questionava exatamente se existia alguma diferença entre elas. De acordo com o gráfico da Figura 28, a maioria dos estudantes, 68%, compreendem que existe diferença, enquanto 22% não sabem opinar e 10% afirmam não existir diferença.

Figura 28 – Você acha que existe diferença entre EF e MF?

Fonte: a autora, 2021.

Para os alunos que responderam sim, foi pedido que os estudantes explicitassem a diferença entre a Matemática Financeira e Educação Financeira. Boa parte dos estudantes compreendem que a Matemática Financeira está mais relacionada aos aspectos matemáticos em relação ao dinheiro como apresenta Assaf (2002). A seguir, destacamos duas respostas interessantes:

Estudante 6: *Acho que a diferença entre educação financeira e matemática financeira é que a educação financeira "educa", te ensina a utilizar o dinheiro de uma forma responsável e econômica. Já a matemática financeira é basicamente os cálculos que utilizamos quando se estuda ou pratica a educação financeira.*

Estudante 4*: Acho que Matemática Financeira se refere à parte dos cálculos, já a Educação Financeira, refere-se a todos os aspectos da área, ao geral.*

O interessante é que alguns estudantes, a exemplo as o Estudante 4 deixam explícito em suas respostas que consideram que a Matemática Financeira é um dos pilares da Educação Financeira, sendo esta, uma área maior que englobam outros aspectos não só matemáticos.

Uma outra resposta que chamou atenção foi novamente do Estudante 24, que assim como em sua definição de Educação Financeira, mais uma vez respondeu envolvendo MF e EF apenas ao campo dos Investimento Financeiros. Em sua resposta o estudante afirma que a *"Matemática Financeira está relacionada ao conteúdo superficial de investimentos (juros, descontos, etc). Já a Educação Financeira é um ensino mais aprofundado na área de investimentos (tesouro direto, fundo imobiliário, criptomoedas, etc)"*. Acreditamos que o estudante esteja delimitando suas respostas ao campo de Investimentos Financeiros uma vez que o minicurso será voltado para Investimentos Financeiros. Segue a resposta do estudante:

Ainda no campo da Matemática Financeira, foi pedido também que os estudantes explicitassem qual a diferença a diferença entre Juros Simples e Compostos. Esse conteúdo foi trabalhado em sala, na etapa anterior a qual eles se encontravam quando respondiam o questionário de sondagem. Sendo assim, acreditava-se que os estudantes tivessem mais facilidade para responder essa pergunta e foi o que ocorreu.

Apenas dois estudantes não responderam à pergunta alegando não se lembrar, enquanto todo o resto respondeu corretamente ou parcialmente correto. A exemplo trazemos algumas respostas:

Estudante 27*: Juros simples são aqueles cobrados sobre um único valor inicial. Não são muito comuns no cotidiano. Por outro lado, os juros compostos são aqueles que se "acumulam", um após o outro, cobrados sobre o valor obtido anteriormente.*

Estudante 21: *O juro simples é aplicado somente no valor inicial, já o juro composto é aplicado com juros sobre juros.*

Estudante 25*: A principal diferença está no fato de que os juros compostos são acumulativos e os simples não são.*

Estudante 2*: O juro simples é calculado tendo como base apenas o valor total, o juro composto é calculado com o valor total mais a soma do valor do juro simples.*

Estudante 9: *O juro simples é um juro mais baixo e o composto são juros mais altos.*

Percebe-se que alguns estudantes entendem a diferença, mas apresentaram dificuldade em explicar corretamente com suas palavras, por exemplo os três últimos estudantes 25, 2 e 9. Isso pode indicar que o conteúdo ainda não está totalmente consolidado para o estudante. Durante os encontros, esses conceitos serão retomados e esperamos que possamos revisar e sanar todas as dúvidas.

A resposta do estudante 9 nos mostra uma confusão comum em relação a esses dois tipos de juros. Apesar da resposta, acreditamos que o estudante entende que os juros compostos incidem sobre o montante acumulado enquanto os juros simples incidem apenas sobre o montante inicial, e por isso acredita que os juros compostos rendem mais do que os juros simples, chamando os de “juro alto” e “juro baixo”, respectivamente.

Vale ressaltar que os estudantes não haviam estudado função quando estudaram Matemática Financeira e, portanto, o ensino dos juros foi baseado em tabelas considerando o tempo como uma variável discreta. Dessa forma, possivelmente não sabem que os juros compostos rendem menos em relação aos juros simples, em situações idênticas, quando o tempo for menor que uma unidade.

Em seguida, buscamos adentrar na área dos Investimentos Financeiros, uma vez que o tema central desse trabalho gira em torno não apenas da Educação Financeira e Matemática Financeira, mas também de conceitos de Investimentos Financeiros. Dessa forma, procuramos identificar qual era o conhecimento prévio que os estudantes tinham acerca dessa temática em específica.

Sendo assim, os estudantes foram questionados sobre o que eles entendiam por inflação, uma vez que esse conceito é muito importante para análise de rendimento real de um investimento. Classificamos as respostas em quatro grupos, a seguir apresentamos essa classificação e alguns exemplos de respostas dada pelos estudantes.

I. Alteração dos preços: o estudante diz que a inflação está relacionada ao aumento dos preços de um produto/serviço.

Estudante 30: *Inflação é a taxa que define o valor das coisas. Por exemplo, quando a inflação aumenta, significa que com o mesmo dinheiro, compro menos coisas do que eu comprava quando a inflação estava mais baixa.*

Estudante 22: *Entendo por inflação como um “deslize” na economia que resulta na alteração dos preços dos produtos e serviços de um determinado local.*

II. Desvalorização da moeda: o estudante diz que a inflação está relacionada à desvalorização da moeda.

Estudante 5: *Entendo que inflação é quando a moeda do país é desvalorizada por algum motivo.*

Estudante 15: *Eu entendo por inflação um aumento dos preços dos serviços e bens em geral devido à desvalorização da moeda, o que gera um menor poder de compra, o seu dinheiro vale menos.*

III. Imposto: o estudante relacionou inflação aos impostos cobrados sobre os produtos.

Estudante 12: *Inflação, na minha opinião, é o quanto de impostos são cobrados por certo produto, fazendo-o encarecer.*

Estudante 14: *Inflação é uma taxa de preço a mais que é colocada no valor dos produtos, sendo eles importados ou nacionais.*

IV. Outros:

Estudante 9: *Inflação é uma forma de ganhar dinheiro.*

Estudante 1: *Eu acho que inflação é quando o governo não consegue organizar o seu dinheiro, ou seja, o dinheiro fica parado. Pouca gente comprando, resultado assim em pouco lucro. Gerando um ciclo.*

Estudante 28: *Inflação eu acho que é quando se tem muito dinheiro, porém esse dinheiro não existe.*

As diferentes respostas nos levam a perceber diferentes níveis de conhecimentos prévios em relação à inflação, acreditamos que isso pode ser consequência de o tema ser muito mencionado em noticiários ou relacionar ao fato de que a maioria dos estudantes conversam com seus familiares sobre dinheiro, como já apresentado, e, como consequência, alguns estudantes já conhecem um pouco sobre o que significa o termo.

Logo em seguida, os estudantes foram questionados sobre o que são investimentos. A maioria dos estudantes relacionaram investimento a um desembolso financeiro em que há uma expectativa de retorno e lucro. No entanto, alguns estudantes compreendem que existem outros recursos a serem investidos além de apenas o dinheiro como apresenta Dubard (2019), a exemplo temos a resposta da estudante 11. A seguir, selecionamos algumas respostas dadas a pergunta:

Estudante 11: *Para mim um investimento é uma ação que se aplica em uma situação, que não necessariamente precisa ser em dinheiro, com intuito de no final colher o que se plantou, ter um rendimento.*

Estudante 15: *Investimento para mim é o dinheiro que você usa para comprar algo para te dar lucro, você investe esperando receber mais do que investiu.*

Estudante 7: *Algo em que você investe dinheiro esperando um retorno dele como bônus; havendo o risco de perdê-lo ou não.*

Estudante 1: *Investimento para mim, é comprar uma pequena parte de uma empresa (ação) e esperar ela crescer até que essa parte se valorize monetariamente e seja superior ao valor de que quando foi comprada.*

O interessante da resposta do Estudante 1 é fato de o estudante pensar em investimento sendo apenas a compra e venda de ações, apesar do ramo de investimentos financeiros não se restringir apenas a isso. Existem investimentos em Renda Fixa que não se fundamentam nessa questão de compra e vendas de títulos e, mesmo os investimentos de Renda Variável, não se baseiam apenas na compra e venda, podendo ser considerados também os benefícios entre o momento de compra e venda. Esperamos que o minicurso expanda o conceito de investimentos dos estudantes.

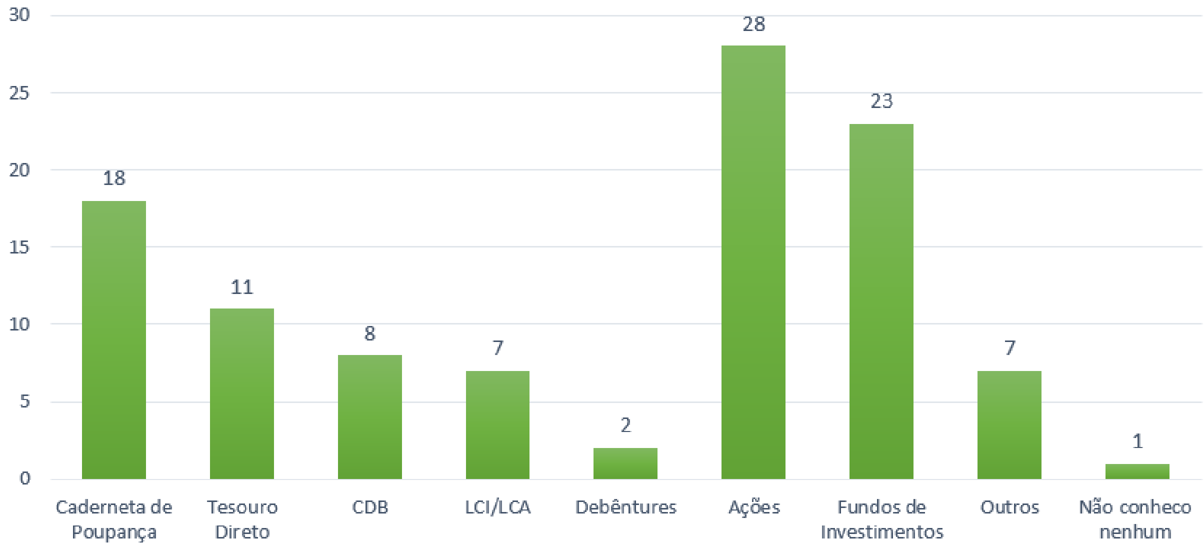
Foi pedido também que os estudantes escrevessem quais palavras vinham a sua cabeça quando pensavam em mercado de investimentos. A Figura 29 apresenta uma nuvem de palavras com as palavras contidas nas respostas dadas pelos estudantes. As três palavras de destaque foram “dinheiro”, “ações” e “bolsa de valores”. As duas últimas palavras nos revelam que boa parte dos estudantes ainda relacionam mercado de investimentos às modalidades de Renda Variável, mesmo que tenha aparecido algumas palavras relacionadas à Renda Fixa.

Figura 29 - Nuvem de palavras relacionadas a Mercado Financeiro

Fonte: a autora, 2021

Ainda sobre investimentos, os estudantes foram indagados sobre quais investimentos financeiros eles conhecem, o resultado está apresentado no gráfico da Figura 30. O interessante é que mais estudantes conhecem Ações do que a Caderneta de Poupança, mas acreditamos que eles devem conhecê-la apenas pelo seu nome popular, “Poupança”. A expectativa é que após o minicurso, os participantes reconheçam esses diferentes tipos de investimentos, sabendo diferenciá-los.

Figura 30 - Investimentos Financeiros previamente conhecidos pelos estudantes



Fonte: a autora, 2021.

Para finalizar o questionário inicial, os estudantes foram questionados sobre suas expectativas em relação ao minicurso. Todos os estudantes estão com altas expectativas principalmente por ser algo que nunca foi ofertado e discutido na escola, como representado nas respostas selecionadas abaixo:

Estudante 26: *Acho que ele será incrível, estou com grande expectativa sobre ele, espero aprender muitas coisas que irão ser essenciais para o meu futuro.*

Estudante 21: *Espero entender mais sobre o mundo de investimentos e como faço para lidar com o dinheiro, pois é algo que tenho muitas dúvidas.*

Estudante 25: *Minhas expectativas são as melhores possíveis, eu nunca tive a oportunidade de entender mais a fundo sobre esse assunto, que na minha opinião é de extrema importância. Espero aprender a melhor forma de investir com segurança e a melhor forma de administrar o dinheiro.*

Apresentado os resultados do questionário inicial de sondagem conseguimos traçar o perfil dos estudantes participantes e de suas respectivas expectativas em relação ao minicurso. A próxima seção destina-se a análise das discussões iniciadas em sala durante os encontros

6.3 Encontros

O **primeiro encontro** tem como tema central Educação Financeira, Matemática Financeira e a Calculadora do Cidadão. Iniciamos o encontro com uma atividade no *software* Mentimeter, no qual os estudantes deviam escrever diferentes palavras que vinham à cabeça quando pensavam em Educação Financeira. A Figura 31 mostra a nuvem de palavras elaborada pelo *software*.

As palavras mais citadas foram “dinheiro”, “economia”, “investimento” e “juros”. Algumas palavras como “juros”, “razão”, “proporção” e “cálculos” nos mostra uma relação mais voltada para a Matemática Financeira, o que nos mostra mais uma vez a dualidade entre Educação Financeira e Matemática Financeira apresentada por Muniz (2016). Outras palavras como “FGC”, “renda fixa”, “ações”, “dividendo” e “bolsa de valores” nos mostram que alguns estudantes conhecem um mínimo sobre investimentos.

Ressaltamos algumas palavras que representam a vertente comportamental da Educação Financeira, como “maturidade”, “autocontrole”, “consumo consciente” e “prudência com o dinheiro”. Essas palavras estão em conformidade com a definição de Educação Financeira apresentadas pela OCDE (2005).

Figura 31 - Nuvem de palavras Educação Financeira

Fonte: a autora, 2021.

Após a apresentação de algumas imagens e frases motivadoras apresentadas na Figura 32, uma discussão interessante que surgiu nesse primeiro encontro foi em relação ao “poder dos juros compostos”.

Figura 32 - O poder dos juros compostos (Slide do encontro)

Fonte: a autora, 2021.

O Estudante 31 apontou que nos juros compostos a taxa de juros é a mesma uma vez que a porcentagem é a mesma em todas as unidades de tempo, mas o valor dos juros vai aumentando em a cada unidade de tempo porque está sendo calculado sobre o montante acumulado, ou seja, o valor inicial mais os juros calculados anteriormente. O Estudante 14 completou que os juros compostos são ótimos para quem está cobrando, mas ruins para quem está devendo. A seguir temos as falas transcritas/escritas desses estudantes.

Estudante 31: *Eu acho que é porque tipo assim, a porcentagem vai aumentando né. NÃO, a porcentagem é a mesma, mas o valor vai aumentando. Aí tipo, o valor anterior já é um valor aumentado em relação ao outro, e aí esse valor agora também vai ser aumentado. Então, cada vez vai ser mais aumentado ainda.*

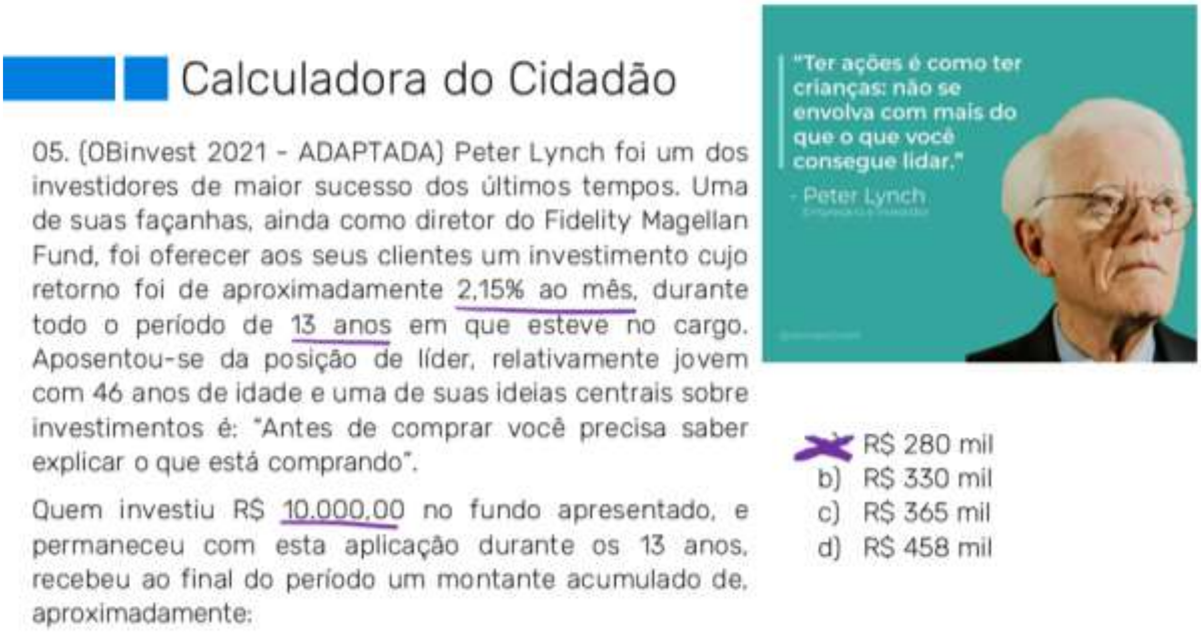
Estudante 14: *Quem tá cobrando os juros compostos só vai sair no lucro enquanto a pessoa que tem que pagar, se for essa situação, vai ficar bem no prejuízo.*

Estudante 21: *Isso mostra que quanto mais dinheiro você tem mais fácil fica de fazer dinheiro.*

Por fim, levando a discussão para um viés mais matemático, os estudantes perceberam que, uma vez que o tempo é o expoente na fórmula dos juros compostos, quanto maior for o tempo, maior será o fator multiplicativo para o capital inicial. Nesse momento, os estudantes conseguiram compreender o comportamento exponencial do montante dos juros compostos mesmo sem aprender funções, e em especial a função exponencial.

Acreditamos que essa atividade tenha favorecido o letramento matemático dos estudantes de acordo com a definição dada pela BNCC (BRASIL, 2018). Ainda na perspectiva desse documento, as próximas atividades faziam o uso de tecnologia por meio da Calculadora do Cidadão e suas ferramentas. Um dos objetivos ao usar essa Calculadora era aproximar as contas da realidade sem se preocupar com o trabalho que as contas poderiam dar, uma vez que muitos livros didáticos utilizam números mais fáceis de fazer a conta, e como consequência, as situações se afastam da realidade.

Figura 33 - Exercício OBInvest (Slide do encontro)



Fonte: a autora, 2021.

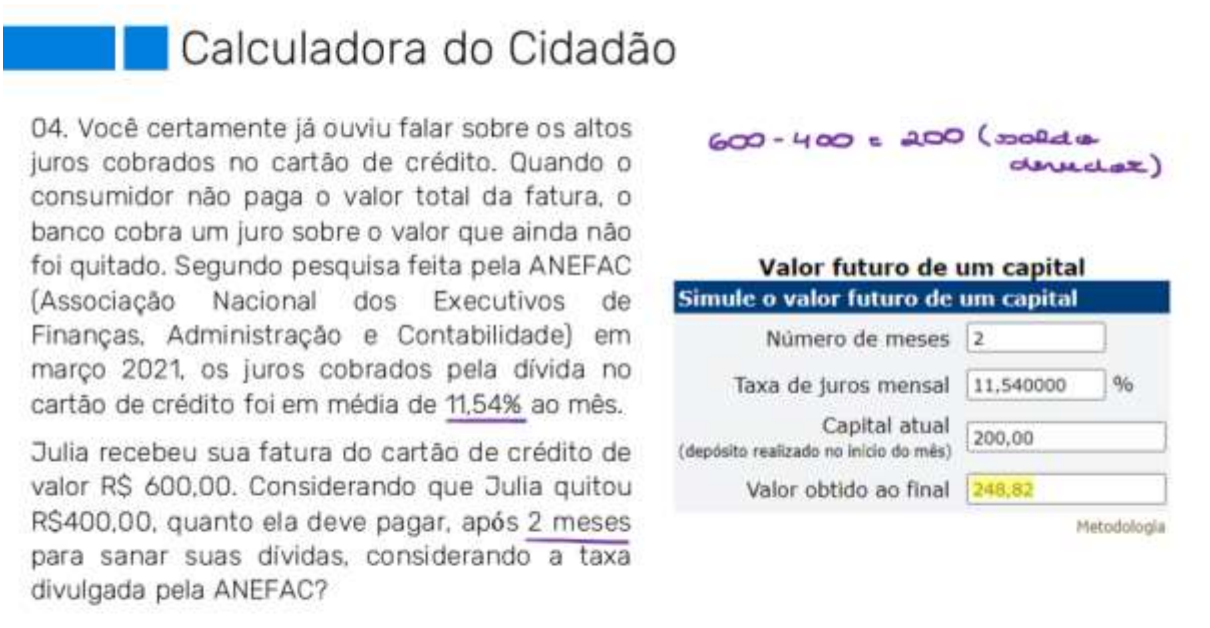
Ao explorar a ferramenta "Valor futuro de um capital" os estudantes deveriam resolver uma questão adaptada da OBInvest 2021 apresentada pela Figura 33. Durante essa questão, o Estudante 31 questionou o porquê de não poder transformar a taxa mensal multiplicando-a por 12 em uma taxa anual. Esse questionamento pode ser justificado por meio dos conceitos de taxas proporcionais e equivalentes nos regimes composto e simples. Para conectarmos esse questionamento ao conteúdo aprendido nas aulas de matemática regular, foi possível responder mostrando por meio da definição de juros compostos e porcentagens sucessivas.

Outra discussão interessante que surgiu ao explorar a Calculadora do Cidadão, foi em uma questão que dava uma situação problema sobre juros no cartão de crédito como mostra a Figura 34. Depois de utilizarem a Calculadora, os estudantes foram questionados se acharam justo o valor pago pela Júlia e se acharam a taxa de juros abusiva. A seguir destacamos a resposta de dois estudantes.

Estudante 12: *Justo, ela já sabia, não quitou porque não quis.*

Estudante 05: *Eu acho que tinha que pagar a mais porque ela sabia que tinha que pagar e deixou, mas os juros são muito abusivos.*

Figura 34 - Exercício Juros Cartão de Crédito (Slide do encontro)



Fonte: a autora, 2021.

Um estudante questionou como que ele saberia se 11,54% **ao mês** era abusivo ou não, daí, a partir desse questionamento eu mostrei que o rendimento médio da Caderneta de Poupança, que muitos estudantes já conheciam, era de 2,48% **ao ano**. Dessa forma, os próprios estudantes concluíram que de fato os juros de cartão de crédito são muito abusivos.

O **segundo encontro** teve como tema central Taxa Selic, Inflação e Taxa real de rendimento. Durante a apresentação da Taxa Selic, os Estudantes 1 e 7 questionaram, respectivamente, se cada país tem sua própria taxa Selic e se é bom a taxa Selic aumentar. Esses dois questionamentos foram importantes para discutirmos sobre a economia nacional e mundial, além dos efeitos da taxa Selic na economia nacional.

Em seguida iniciamos a discussão sobre o que os estudantes entendem por inflação, para isso foram apresentadas algumas imagens que ajudassem a conduzir a discussão de acordo com a Figura 35. As respostas convergiram com as respostas dadas no questionário inicial de sondagem, mas dessa vez foi possível explicar e explorar melhor o que significa o termo inflação, além de discutir o que pode gerar inflação e quais as consequências da inflação para a economia e vice e versa.

Figura 35 - Inflação (Slide do encontro)

Fonte: a autora, 2021.

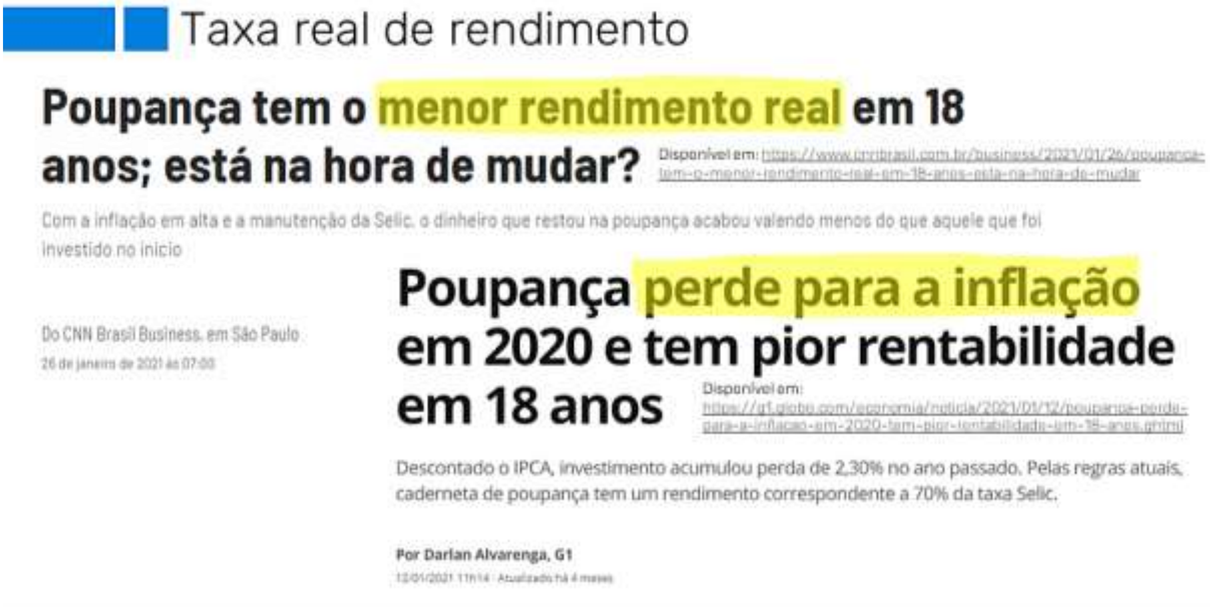
Ainda sobre a temática de inflação, foi proposta uma atividade utilizando a fermenta "Correção de valores" da Calculadora do Cidadão. Nessa atividade, os estudantes eram situados sobre a questão do ajuste no valor de uma bolsa de mestrado concedidas pelo governo. Considerando que a bolsa de mestrado foi ajustada pela última vez em 2013 para R$ 1.500 e não sofreu reajustes até então, os estudantes calcularam qual seria o valor ajustado da bolsa até 2021, considerando o IPCA. Após o uso da Calculadora do Cidadão, foi possível averiguar que se a bolsa tivesse acompanhado o Índice o valor seria de aproximadamente R$ 2.300,00.

Nessa atividade, o Estudante 14 contestou se o preço da bolsa não ter mudado era bom ou ruim e outros colegas responderam que não era bom, uma vez que o bolsista teria perdido o poder de compra.

Por fim, os estudantes foram questionados se os salários são ajustados de acordo com a inflação, e os Estudantes 20, 28 e 31 disseram que achavam que sim, uma vez que todo ano o salário-mínimo aumentava. Outros estudantes disseram que não, baseando-se no resultado da bolsa de mestrado obtido na questão anterior. Daí pudemos discutir que de fato o salário-mínimo é ajustado todo o ano devido à inflação, no entanto, o reajuste feito pode ser menor que a taxa de inflação. Disso, o Estudante 4 afirmou que a inflação é pior para as pessoas de baixa renda, afirmando que a inflação faz o "*pobre ficar ainda mais pobre*".

Para finalizar esse segundo encontro, foram apresentados para os estudantes duas manchetes de jornal sobre o rendimento real da Caderneta de Poupança, como mostrado na Figura 36. A partir daí, os estudantes foram questionados o que significa o termo "rendimento real" e alguns responderam que seria o rendimento verdadeiro, mas não saberiam explicar o que seria esse rendimento real. Depois de refletirem um pouco, o Estudante 31 explicou que o rendimento real negativo seria quando: "v*ocê deixa o dinheiro investido, e aí quando o pega de volta, mesmo com juros, tá valendo menos". Daí pudemos explicar, de maneira geral, que o rendimento real é o rendimento quando descontado a inflação.

Figura 36 - Rendimento real da Poupança (Slide do encontro)



Fonte: a autora, 2021.

Por fim, questionamos se a Caderneta de Poupança era uma boa aplicação e o Estudante 3 respondeu: "*Poupança não é a melhor aplicação, mas quando o dinheiro fica em casa, fica mais negativo ainda porque não vai aumentar em nada.*"

Por meio dessa discussão, pudemos perceber uma evolução da turma como um todo em relação a capacidade de discutir assuntos financeiros sem desconforto e compreender situações em relação a economia geral. Dessa forma, acreditamos que até então a literacia financeira (ORTON *apud* SOMAVILLA; BASSOI, 2016) tem sido desenvolvida.

A partir do **terceiro encontro,** iniciamos a discussão e apresentação sobre Investimentos Financeiros. Inicialmente foi discutido o que são investimentos e o que são investimentos financeiros para contribuir para a consolidação do conceito após as respostas do questionário inicial de sondagem.

Em seguida, abordamos a diferença entre investir, poupar, especular e apostar de acordo com Costa (2016), o que fez o Estudante 31 questionar se a Caderneta de Poupança seria uma forma de investir ou de poupar. Daí foi possível perceber a pequena confusão que algumas pessoas fazem uma vez que de maneira popular a Caderneta de Poupança é chamada de Poupança. No entanto, para a Estudante 29 "*o ato de poupar é só evitar de gastar",* e, portanto, a Caderneta de Poupança pode ser considerada sim como uma forma de investimento.

Todavia, considerando o rendimento real da Caderneta de Poupança nos últimos anos, de acordo com a Tabela 9 apresentada, a Poupança não tem garantido a segurança do principal e muito menos um retorno adequado como aponta Graham (2017) em sua definição de investimento.

Posteriormente, foi feita uma reflexão sobre a importância de se investir e algumas respostas nos chamaram a atenção uma vez que demonstraram que os estudantes compreenderam alguns temas discutidos nos encontros anteriores, como o conceito de inflação. A seguir, apresentamos algumas respostas dadas oralmente/escrito no encontro, quando questionados qual a importância de se investir financeiramente.

Estudante 26: *Para ter retorno de alguma coisa que vai te beneficiar.*

Estudante 1: *É bom para valorizar meu dinheiro.*

Estudante 17: *Ter mais poder de compra.*

Estudante 28: *Para não deixar seu dinheiro perder para a inflação.*

Estudante 21: *Eu acho que é uma forma inteligente de "guardar" seu dinheiro*.

Estudante 4: *Acho que é melhor do que deixar o dinheiro parado.*

Após essa discussão, apresentamos as condições e procedimentos necessários para que um menor de idade possa investir e seguimos apresentando investimentos em Renda Fixa. De acordo com as recomendações do plano diretor da ENEF (BRASIL, 2011a), foram apresentados e discutidos os diferentes tipos de investimentos nessa modalidade, além de suas características individuais, como cobrança de diferentes impostos com e as condições para cobertura de segurança pelo FGC.

Uma discussão interessante durante esse encontro aconteceu após o exercício proposto apresentado pela Figura 37 e a pergunta disparadora apresentada após informações dadas em um trecho motivador de Cerbasi (2019) apresentado na Figura 38. Nesse trecho, o autor aponta que taxas muito acima de 100% do CDI significa que o banco que a oferta tem dificuldades de captação de dinheiro. Daí os estudantes foram questionados se achavam seguro investir em um CDB que ofertava uma taxa dessa forma. A seguir selecionamos algumas respostas dos estudantes.

Estudante 4: *Não acho seguro e não faria.*

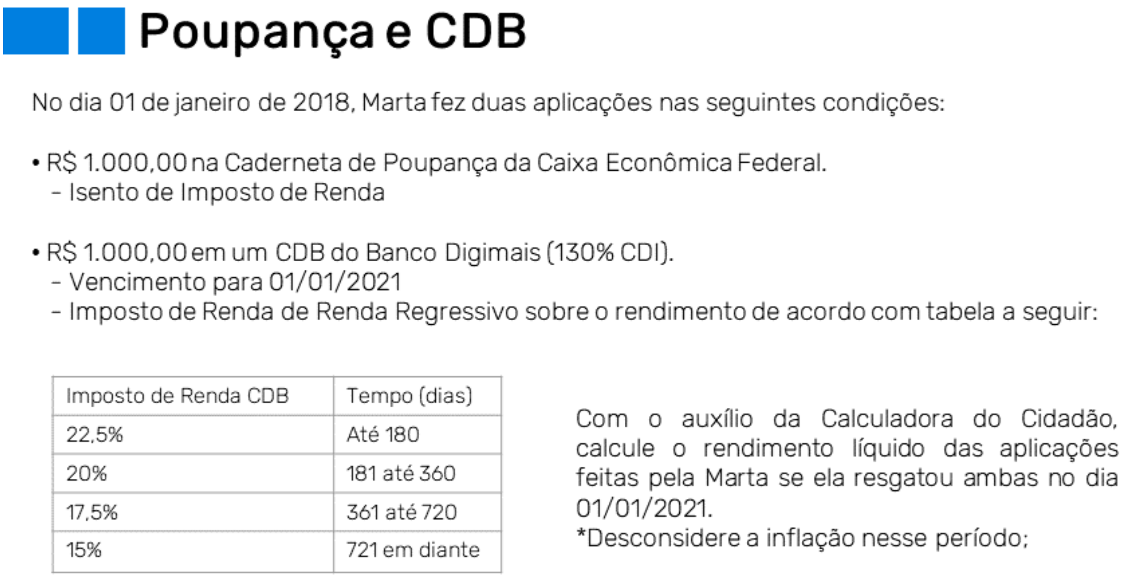
Estudante 16: *Não faria, mas acho seguro.*

Estudante 1: *Esse CDB entra naquele negócio de segurança, né? Então acho que é seguro.*

Muitos estudantes inicialmente responderam, assim como o estudante 4 e 16, que não fariam investimentos desse tipo pois não achavam seguro, uma vez que o banco poderia quebrar. O Estudante 1, lembrando das condições de cobertura do FGC para investimento do CDB, afirmou que achava seguro, desde que fosse investido até 250 mil. Depois dessa fala, muitos colegas se lembrando dessas condições, mudaram de posição afirmando que, dessa forma, fariam o investimento.

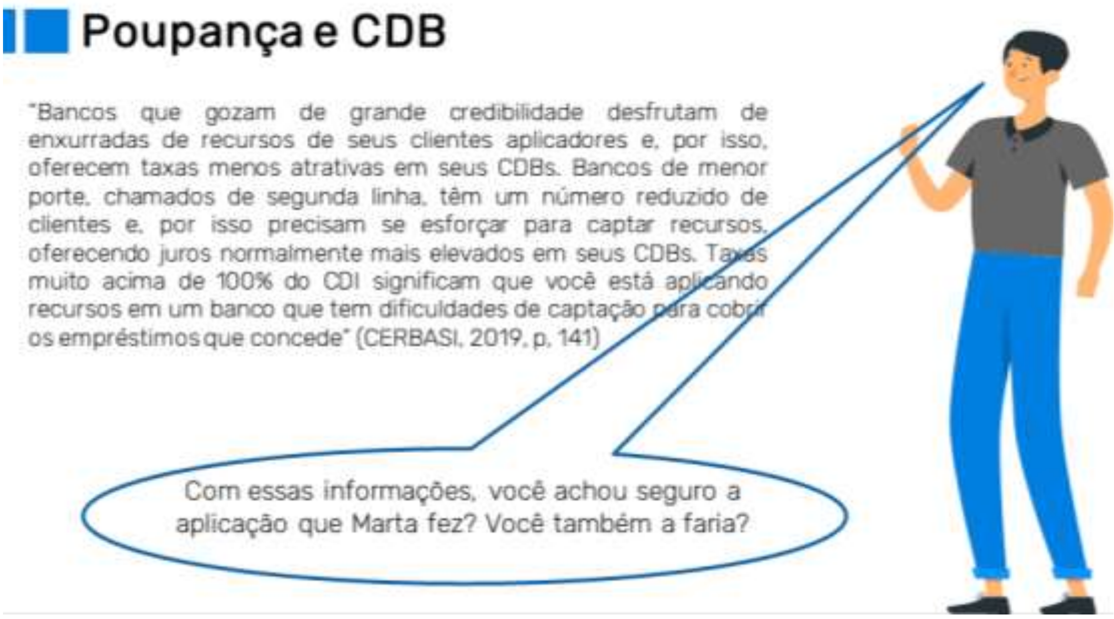
Ao resolvermos e discutirmos essa questão, fica clara a capacidade do estudante de interpretar e tomar decisões financeiras, e, portanto, podemos considerar que a Educação Financeira está sendo desenvolvida, de acordo com a perspectiva da OCDE (2005) e de Silva e Powell (2013).

Figura 37 - Exercício proposto (Slide do encontro)



Fonte: a autora, 2021.

Figura 38 - Poupança e CDB (Slide do encontro)



Fonte: a autora, 2021.

O **último encontro** foi focado em investimentos na modalidade de Renda Variável. Prontamente o Estudante 1 perguntou como se o cálculo do retorno de investimentos dessa modalidade também funcionava baseando-se no sistema de juros compostos. Daí pudemos discutir a principal diferença entre investimentos em Renda Fixa e Renda Variável.

Uma reflexão interessante durante esse encontro foi em relação a compra e venda de ações. Apresentamos um gráfico com o valor de compra e venda de uma ação, e os Estudante

20 afirmou que o melhor é "*comprar quando é mais barato e vender quando é mais caro*". O Estudante 15 questionou: "*mas se todo mundo comprar no baixo quem vai querer comprar quando tiver mais alto?*". Essa afirmação e questionamento impulsionaram a turma a pensar sobre a questão de como prever quando o preço da ação estaria em alta e quando estaria em baixa e, por fim, o Estudante 1 afirmou que "*compramos a ação quando achamos que ela vai valorizar, mesmo que não tenhamos controle sobre o futuro*".

Após essas considerações e levantamentos, foi proposta uma atividade, apresentada pela Figura 39, em que os estudantes deveriam analisar dois gráficos do valor das ações, sendo o primeiro de um shopping e o segundo de uma empresa de plano de saúde. Os estudantes observaram que o período marcado de amarelo na Figura, coincidia com o início da pandemia da Covid-19, e daí surgiram discussões sobre como a pandemia afetou a economia dos países e quais foram seus reflexos no mercado de ações.

Figura 39 - Cotação das Ações (Slide do encontro)

Fonte: a autora, 2021.

Em seguida, o encontro tomou um viés um pouco mais teórico, uma vez que foram apresentados e discutidos diferentes conceitos. Foram apresentados diferentes tipos de investimentos em Renda Variável, como ações, fundos e criptomoedas, além da apresentação da B3 e da IBOVESPA. Posteriormente foram apresentados os diferentes perfis de investidores e conceitos importantes como risco, retorno e liquidez de um investimento.

Por fim, encerramos o minicurso fazendo uma retomada dos principais conceitos estudados até então e agradecendo a participação de todos. Os estudantes foram orientados a responderem o questionário final de *feedback*.

De maneira geral, o minicurso foi elaborado de maneira a introduzir os estudantes a questões de finanças, de maneira crítica e reflexiva, de acordo com a definição de Educação Financeira Escolar proposta por Silva e Powell (2013). Acreditamos, portanto, que todas as atividades propostas tenham enriquecido os conhecimentos dos estudantes em relação às finanças e que tenha proporcionado ambientes favoráveis ao desenvolvimento da Literacia Financeira por meio da Educação Financeira (FREITAS, 2021).

Para contribuir para essa análise geral sobre o minicurso, a próxima seção é destinada as análises do questionário final de *feedback*, as quais acreditamos que nos auxiliará a compreender se o minicurso contribuiu para a Educação Financeira dos estudantes.

6.4 Questionário final de *feedback*

O questionário final ficou disponível para os estudantes logo após o último encontro, por um período de três dias. O questionário contava com 9 questões, sendo 8 abertas e uma de classificação. As questões abertas permitiam que os estudantes pudessem se expressar livremente sobre suas impressões em relação ao minicurso, e por isso optamos por esse formato.

De início, os estudantes foram questionados sobre a Calculadora do Cidadão e todos alegaram que acharam muito útil conhecer e aprender a utilizar essa ferramenta. Dois estudantes apontaram que inicialmente acharam mais complicado utilizá-la já que a calculadora tinha muito detalhes. Acreditamos que essa ferramenta de fato pode e deve ser explorada com mais calma, inclusive durante as aulas de Matemática Financeira no ensino regular.

A Estudante 8 apontou que adorou conhecer e aprender sobre a Calculadora do Cidadão. Ademais, também compartilhou que *"[...] depois da aula, eu fiquei usando a Calculadora do Cidadão e vendo o quanto eu lucraria se colocasse meu dinheiro na poupança e já pensando em ficar bilionária kkkk. Além disso, mostrei para a minha mãe a calculadora e ela também ficou entusiasmada e super interessada!"*. Essa resposta confirma que a estratégia da ENEF (BRASIL, 2011b) de que a Educação Financeira Escolar beneficia não só os estudantes, uma vez que esses podem levam os conhecimentos adquiridos para o ambiente familiar.

Quando questionados se o minicurso atendeu às expectativas pessoais de cada participantes, a maioria respondeu que sim. Esse resultado está em conformidade com o que observado por nós durante os encontros, uma vez que a maioria dos estudantes se mantiveram engajados e participativos durante todos os encontros.

A seguir, explicitamos a resposta de alguns estudantes que mostram satisfação com os temas aprendidos e discutidos durante o minicurso. Os grifos foram feitos por nós, de maneira a destacar elementos que comprovam que o minicurso, por meio da sequência didática e sua dinâmica conseguiram atingir esses estudantes, contribuindo para a compreensão da temática e Educação Financeira deles.

Estudante 2: *Eu posso dizer com toda certeza que ultrapassou minhas expectativas, eu particularmente, pensei ser algo mais parado, mas pelo incrível que pareça, gostei mais do que imaginava. Adorei a oportunidade de participar, e* ***pretendo aprender mais e mais sobre.***

Estudante 11: *Achei super válido e interessante o minicurso! Atendeu super minhas expectativas.* ***Algo que não teria aprendido tão cedo se não tivesse participado****.*

Estudante 17: *Gostei muito, foi além do que eu esperava. As aulas foram muito explicativas, e* ***durante o curso percebi que gosto muito de economia e isso pode vir a ser minha profissão.***

Estudante 15: *Eu gostei muito do minicurso, a forma com que a Laís foi dando* ***às aulas de uma forma bem dinâmica ajudou muito na compreensão e no aprendizado****, e superou muito minhas expectativas.*

Estudante 13: *Eu gostei do minicurso e achei que atendeu as minhas expectativas pois* ***consegui aprender coisas novas e aprofundar meu conhecimento.***

A classificação média do nível de satisfação e aprendizagem com o minicurso foi de 4,89 em 5. A Figura 40 apresenta a média dessa classificação dada pelos estudantes a cada encontro do minicurso. Todos os encontros atingiram um mínimo de 95% de satisfação e aprendizagem, o que indica que a temática do minicurso tenha cativado os estudantes.

Figura 40 - Classificação média dos encontros

Fonte: a autora, 2021.

Além disso, podemos destacar, mesmo que por centésimos, os dois últimos encontros foram os que obtiveram maior média. Julgamos que isso se deva ao fato de a temática de Investimentos ser a mais interessante para os estudantes.

Apenas 13% dos estudantes disseram que o minicurso não atendeu ou atendeu parcialmente às suas expectativas, uma vez que já sabiam o básico sobre investimentos financeiros e ressaltaram que gostariam de ter aprofundado mais em algumas temáticas como análise gráfica e fundamentalistas de investimentos, imposto de renda e economia.

A seguir explicitamos a resposta de alguns estudantes que representam essa situação. Fizemos alguns grifos de maneira a destacar que mesmo que o minicurso não tenha atendido totalmente as expectativas pessoais desses estudantes, que esses ainda considerando que as discussões ao longo dos encontros foram úteis para aprender coisas novas, principalmente para os colegas que ainda não haviam sido inseridos no mundo das finanças.

Estudante 24: *Eu gostei do minicurso,* ***aprendi algumas coisas que não fazia ideia de que existiam, mesmo conhecendo um pouco sobre as ações e o mercado.*** *Infelizmente o minicurso não atendeu às minhas expectativas. Foi um curso útil para quem está começando nessa área, mas para mim não me ajudou tanto, esperava que o curso fosse algo bem mais aprofundado. Ademais isso não quer dizer que o curso foi ruim e inútil para mim,* ***eu aprendi sim algumas coisas,*** *mas acabei superestimando demais.*

Estudante 30: *Atendeu minhas expectativas apesar de que elas eram relativamente simples pois sei que as aulas precisam ser básicas para que todos acompanhem.* ***O curso abordou de forma simples e clara os assuntos necessários para uma introdução nos investimentos.***

Alguns estudantes apontaram que gostariam que o minicurso tivesse mais aulas justamente para que pudessem aprofundar mais nos assuntos. A exemplo trazemos o comentário do Estudante 14: "*Por ser um minicurso eu achei que esteve tudo ótimo. Mas se fosse um curso um pouco mais prolongado eu iria sugerir aprofundar mais nos assuntos.".*

Nesse sentido, consideramos que a área de Educação Financeira é muito ampla, assim como a sub temática de investimentos financeiros. Assim, já sabíamos que um minicurso de seis horas não conseguiria explorar a temática por inteiro, e por isso foi incentivado durante os encontros, que os estudantes continuassem seus estudos sobre investimentos financeiros para além dos encontros do minicurso por meio de diferentes ferramentas.

O comentário do Estudante 25 corrobora o apresentado acima ao afirmar que: *"O minicurso foi uma forma de incentivar nosso gosto pela área. Eu realmente pretendo manter minha curiosidade e interesse. Foi deixado bem claro ao longo das aulas a importância de entender mais, investir no conhecimento, ir além".*

O Estudante 25 também aponta que em sua opinião "*seria bom ter mais aulas, reduzindo então o tempo de cada uma. Assim, conseguiremos manter melhor a nossa concentração do início ao fim das aulas".* Daí podemos considerar que teria sido vantajoso se o minicurso pudesse ter sido desenvolvido em 8 encontros de 1 hora cada, totalizando em 8 horas, do que em 6 horas divididas em quatro encontros de 1 hora e meia cada. Dessa forma as aulas não ficariam tão longas e o aumento de carga horária fazia com que algumas temáticas pudessem ser abordadas com mais tranquilidade e/ou que fossem aprofundados alguns temas.

Quando questionados se após o minicurso eles se sentiam mais interessados a continuar pesquisando sobre questões de Educação Financeira e Investimentos Financeiros, todos os estudantes afirmaram que sim. Dessa forma acreditamos que o minicurso tenha incentivado e/ou despertado o interesse dos estudantes sobre a temática.

Para finalizarmos as análises do questionário final, compartilharemos mais três trechos de respostas de estudantes para que possamos fazer alguns comentários.

Estudante 20: *Para quem não sabia nada, agora já tenho uma boa noção sobre como controlar o meu dinheiro e muito mais.*

Estudante 8: *Após aprender sobre esse conteúdo, já me sinto uma pessoa mais preparada para lidar com o meu dinheiro de forma consciente.*

Estudante 27: *Depois do início do curso, coisas que eu ficava pensativo eu perguntava para meu pai que é formado em economia e, com o que aprendi no curso e com a ajuda dele, agora eu consigo utilizar meu dinheiro de uma forma melhor*. *Meu pai disse que eu consegui aprender muito com o curso e que comecei a demonstrar interesse na área.*

Esses trechos evidenciam que, após o minicurso, os estudantes sentem mais seguros para lidar com questões financeiras de maneira consciente. O comentário do Estudante 27 mostra, inclusive, um retorno de um familiar, formado em Economia, sobre a aprendizagem do estudante em relação ao minicurso.

Na seção a seguir iremos explicitar nossas considerações sobre o desenvolvimento do minicurso de acordo com nossos referenciais teóricos.

6.5 Considerações sobre o desenvolvimento do minicurso

Dados os relatos e análises apresentados, passaremos a analisar o material e a aplicação de forma a responder nosso objetivo de pesquisa, que era construir uma sequência didática que aborde a teoria de investimentos financeiros para alunos do 9º ano do ensino fundamental e investigar se tal sequência contribui para a educação financeira desses estudantes.

Para iniciar, faremos uma análise à luz das competências específicas de Matemática para o Ensino Fundamental da BNCC (BRASIL, 2018)[23]. A sequência didática foi elaborada de maneira a estimular a Competência 7, que aponta que os estudantes devem ser capazes de discutir sobre questões de urgência social. Isso foi estimulado principalmente no primeiro

[23] Apêndice D – Página 161 e 162

encontro, no qual foi discutido a importância da Educação Financeira para a sociedade como um todo.

Acreditamos também que o uso de ferramentas tecnológicas foi incentivado de maneira que contribuíssem para resolver problemas, como previsto pela Competência 5. A exemplo temos as diferentes questões exploradas usando-se a Calculadora do Cidadão e, o simulador do Tesouro Direto.

Outra competência estimulada, foi a Competência 2, uma vez que os estudantes foram incentivados a produzirem argumentos durante às discussões levantadas, recorrendo também à conhecimentos matemáticos para essa argumentação. A exemplo, temos a situação de discussão sobre o poder dos juros compostos.

Por fim, acreditamos que a Competência 4 também tenha se feito presente, uma vez que os estudantes fizeram observações de aspectos quantitativos e qualitativos presentes nas práticas sociais e culturais. A exemplo temos as discussões sobre a Inflação e o ganho real de um investimento, além da situação problema que envolvia o rendimento de juros em diferentes tipos de investimentos, considerando sua rentabilidade, imposto e segurança. Em ambas as discussões existiam variáveis matemática e não matemáticas a serem consideradas.

Agora, seguimos para as considerações em relação a construção, aplicação e análise do minicurso na perspectiva de Educação Financeira e Educação Financeira Escolar. O minicurso contribuiu para que os estudantes aprimorassem sua compreensão sobre produtos, conceitos e risco financeiros, desenvolvendo habilidades e confiança para se tornarem mais conscientes, o que está de acordo com a definição de Educação Financeira na perspectiva da OCDE (2005). Além disso, o minicurso constituiu-se de um conjunto de informações na qual os estudantes foram inseridos no universo do dinheiro, estimulando-os a refletir comportamentos e compreender conceitos sobre finanças e economia, o que está de acordo com a definição de Educação Financeira Escolar dada por Silva e Powell (2013).

No entanto, o minicurso não se limitou a promover um conjunto de informações e conhecimento de produtos financeiros. Julgamos que a sequência didática, da maneira que foi montada e aplicada em sala por meio do minicurso, contribuiu para a Educação Financeira dos estudantes, uma vez que, as discussões levantadas ao longo dos encontros proporcionaram reflexões de maneira crítica sobre situações envolvendo consumo, poupança e investimentos. (MUNIZ, 2016). E ao tratarmos questões financeiras por meio do convite à reflexão, criamos um Ambiente de Educação Financeira Escolar (AEFE), ambiente no qual

> [...] professores, alunos e/ou pesquisadores, convidam professores, alunos e/ou pesquisadores a pensar sobre questões financeira que envolvam ideias matemáticas, mas que não se limitem a elas. AEFE são formados por momentos em que se abrem portas e janelas para se convidar os alunos a pensarem sobre situações financeiras em uma perspectiva ampla, interativa e multidisciplinar. (MUNIZ, 2016, p. 49)

Acreditamos que esses Ambientes tenham sido criados durante diversos momentos do minicurso, de acordo com o que relatado durante a seção de apresentação e análises dos encontros. A exemplo, acreditamos que o minicurso:

- Permitiu com que os estudantes usassem Matemática Básica na leitura de informações financeiras;
- Estimulou a reflexão sobre a importância do planejamento financeiro e investimentos financeiros;
- Instigou a curiosidade sobre produtos financeiros e sobre mecanismos de escolha;
- Incentivou a reflexão e produção de significados, por parte dos estudantes, de temas e conceitos financeiros.

Por fim, o *feedback* dado ao final do minicurso nos ajuda a concluir que de fato a sequência didática contribuiu a Educação Financeira dos estudantes, pois fica evidente nas falas dos estudantes mais maturidade para lidar e conversar sobre questões financeiras, além de demostrarem satisfação, em sua maioria, pela forma com que o minicurso foi desenvolvido e maior entendimento sobre o tema.

Dessa forma, acreditamos que de fato a sequência didática elaborada e desenvolvida contribuiu diretamente para a Educação Financeira desses estudantes, como era nosso desejo investigar. Nesses termos, encerramos esse texto anunciando o próximo capítulo da dissertação, contendo as considerações finais acerca dessa pesquisa de mestrado.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A Educação Financeira pode ser entendida como o processo de transição entre o analfabetismo financeiro e a literacia financeira e, desenvolve competências pessoais no tocante ao planejamento financeiro e à tomada de decisões, revelando-se fundamental para o crescimento e estabilidade econômica do país.

Dado essa relevância da Educação Financeira para o indivíduo e o país, esse trabalho surgiu diante de nosso entendimento em relação a importância de se inserir, na Educação Básica, discussões sobre questões envolvendo Educação Financeira e Investimentos Financeiros, de acordo com as orientações da BNCC (BRASIL, 2018) e da ENEF (BRASIL, 2011b). Mais especificamente, nossa pesquisa tinha como objetivo construir uma sequência didática que aborde a teoria de investimentos financeiros para alunos do 9º ano do ensino fundamental e investigar se tal sequência contribui para a educação financeira desses estudantes

Trabalhar a Educação Financeira na Escola é uma forma de tornar crianças e jovens propagadores de comportamentos que moldarão uma cultura financeira mais sólida. Nesse sentido, ancoramos nossos estudos na perspectiva da Educação Financeira Escolar de acordo com Silva e Powell (2013) e Muniz (2016).

Dessa forma, iniciamos os estudos de nosso referencial teórico, o qual foi sustentado por três eixos temáticos principais. O primeiro eixo se refere à Educação Financeira, em especial a Educação Financeira Escolar, o segundo é em relação a Matemática Financeira, considerando o estudo do dinheiro no tempo em relação às ferramentas matemáticas. E, o último e terceiro eixo se refere aos Investimentos Financeiros e suas aplicações.

Em relação aos Investimentos Financeiros, percebemos uma carência de pesquisas e atividades propostas para o ambiente escolar que envolvessem conceitos e práticas em relação a temática. Além disso, a maioria das pesquisas propõe o tema apenas para o Ensino Médio e acreditamos que isso se deve ao fato dessa etapa da Educação Básica possibilitar uma abordagem matemática mais técnica.

No entanto, acreditamos que o tema de Investimentos Financeiros pode e deve ser abordado em todos os anos finais do Ensino Fundamental e em todo Ensino Médio, levando-se em consideração as especificidades de cada ano/série. Nesse sentido, elaboramos uma sequência didática e seu material de apoio que buscava discutir temas como Educação Financeira, Matemática Financeira, Calculadora do Cidadão, taxas de juros importantes – SELIC, inflação e CDI – e conceitos básicos de Investimentos Financeiros.

Essa sequência didática e o material de apoio compõe o produto educacional produzido nesta pesquisa de mestrado, e foram formulados focando nos pilares da Educação Financeira Escolar, para introduzir os conceitos básicos de finanças e investimentos financeiros. Para isso foram discutidas a definição de Educação Financeira e sua diferença em relação à Matemática Financeira. Em seguida, para fazer a conexão didática com as aulas regulares de Matemática, foi retomado os conceitos de juros simples e juros compostos. Em seguida, foram apresentados conceitos básicos de economia e investimentos financeiros por meio de discussões e situações que promovessem a reflexão. A sequência didática também explorou recursos tecnológicos, como o uso da Calculadora do Cidadão em diferentes situações utilizando-se de suas diferentes funcionalidades.

A sequência didática foi elaborada considerando um público-alvo do 9º ano do Ensino Fundamental e desenvolvida no formato de um minicurso extracurricular em uma escola da rede particular de Belo Horizonte/MG. Sessenta e um estudantes se inscreveram para a atividade, os quais foram divididos em duas turmas e, apenas uma foi considerada para análise dos dados. Os encontros com estudantes aconteceram de maneira remota e em horários do contraturno escolar.

No esforço de respondermos à nossa questão de pesquisa, optamos pela metodologia de pesquisa qualitativa, na qual foram utilizados os seguintes métodos de coleta de dados: questionários, observação participante, diário de campo, vídeo (gravação dos encontros) e a própria sequência didática criada junto ao seu material de apoio.

Acreditamos que a sequência didática, da maneira como foi elaborada promoveu Educação Financeira dos estudantes uma vez que as questões e discussões promovidas durante os encontros do minicurso, incentivou os estudantes a serem indivíduos mais críticos e conscientes em relação as finanças pessoais. Ademais, os participantes tiveram a oportunidade de discutir conceitos e aspectos financeiros de uma maneira crítica e reflexiva, nunca discutidos até então naquele ambiente escolar, demonstrando, por fim, entendimento e satisfação sobre a temática.

Ao tratarmos questões financeiras por meio do convite à reflexão, envolvendo ideias matemáticas e não-matemáticas, acreditamos que criamos um ambiente favorável ao desenvolvimento da literacia financeira, que é explicado e definido por Muniz (2016) como Ambiente de Educação Financeira Escolar (AEFE).

A maioria dos estudantes participou continuamente de todos os encontros e, de acordo com o *feedback* dado por eles, o minicurso e seus elementos foram capazes de despertar o interesse dos estudantes sobre a temática de Investimentos Financeiros. Além disso, pudemos perceber os estudantes engajados e participativos durante os encontros. Sendo assim, julgamos que a sequência didática atingiu seu objetivo principal de contribuir para Educação Financeira dos participantes.

Acreditamos também que se o minicurso tivesse acontecido de maneira presencial, o que não foi possível devido a pandemia do COVID-19, as atividades poderiam ter sido desenvolvidas de maneira a potencializar o protagonismo dos participantes. Esperamos que possamos desenvolver essa sequência didática novamente, na mesma escola, no entanto em situação de ensino presencial.

Importante considerar o fato de que o minicurso poderia explorar mais profundamente alguns tópicos, o que não foi possível devido às limitações de sua carga horária. Alguns alunos apontaram que gostariam de ter aprofundado em alguns temas específicos, por exemplo: Imposto de Renda, que pode ser explorado em uma sequência didática atrelada à Educação Fiscal, e Análise Gráfica e Fundamentalista de Investimentos Financeiros, que pode ser aprofundado em um curso de Investimentos Financeiros.

Sendo assim, consideramos que essa temática pode ser ainda explorada em sala de aula, principalmente devido ao espaço que a Educação Financeira tem tomado na perspectiva do Novo Ensino Médio, considerando os itinerários formativos. De maneira geral, muitas escolas já estão propondo itinerários formativos de Educação Financeira e, dessa forma, esperamos que daqui alguns anos, a população brasileira tenha atingido um novo patamar em relação à literacia financeira.

Vale ressaltar que a Educação Financeira promovida no ambiente escolar deve fazer parte da formação integral do estudante. Lembrando que a Educação Financeira Escolar não se limita apenas aos conceitos de finanças pessoais, sendo baseada na reflexão crítica em torno desses conceitos. Dessa forma, expectamos que o material produzido, tanto nesta dissertação quanto no produto educacional, sirva como apoio para os professores e estudantes que tenham interesse nessa área. Além disso, também esperamos que esse trabalho e seus resultados sirvam de estímulo e auxílio para outros professores que desejem trabalhar com Educação Financeira, e principalmente Investimentos Financeiros, na Educação Básica.

Por fim, também esperamos que esse trabalho e pesquisa sirva de base para outros que ainda venham a ser desenvolvidos, principalmente pelo Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Financeira – GEPEFin, no CEFET/MG. Acreditamos que o grupo possa criar um material digital interativo, baseado no já produzido nesta pesquisa, além de promover cursos, como curso básico de Economia e Finanças para os estudantes do curso técnico do CEFET/MG e cursos de formação de professores em relação a Educação Financeira Escolar.

REFERÊNCIAS

ANBIMA. **Raio X do investidor brasileiro.** 4ª edição, 2021. Disponível em: https://www.anbima.com.br/pt_br/especial/raio-x-do-investidor-2021.htm. Acesso em: 28 nov. 2021.

ARAÚJO, F. C.; CALIFE, F. E. A história não contada da Educação Financeira no Brasil, 2014. Disponível em: https://www.boavistaservicos.com.br/wp-content/uploads/2014/08/A-hist%C3%B3ria-n%C3%A3o-contada-da-educa%C3%A7%C3%A3o-financeira-no-Brasil.pdf . Acesso em: 20 mar. 2021.

ASSAF, A. N. **Matemática Financeira e suas aplicações.** 7ed. São Paulo: Atlas, 2002. 436p.

BANCO CENTRAL. Site do Banco Central do Brasil. Disponível em: https://www.bcb.gov.br/. Acesso em: 11 mar. 2021.

BENEDETTI, Y. V. **Você é um analfabeto financeiro?** Moinhos Educação Financeira. Nov. 2019. Disponível em http://moinhosedu.com.br/voce-e-um-analfabeto-financeiro/. Acesso em 09 out. 2021.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação Qualitativa em Educação Matemática:** uma introdução à teoria e métodos. Lisboa: Porto Editora, 1991.

BONFIM, I. N.; BONATTO, L. J. O.; SANTOS, B. P. Matemática Financeira e Ensino Médio: uma atividade de análise. In: SEMINÁRIO DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO FINANCEIRA ESCOLAR E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. **Anais...** Juiz de Fora, UFJF, 2019, p. 250-257.

BORGES, P. R. S. Educação financeira e sua influência no comportamento do consumidor no mercado de bens e serviços. In: ENCONTRO DE PRODUÇÃO CIENTÍFICA E TECNOLÓGICA DA FECILCAM. FECILCAM. **Anais...** Campos Mourão, 2010.

BRASIL, Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional – LDB. Brasília, 1996. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seesp/arquivos/pdf/lei9394_ldbn1.pdf. Acesso: 26 out. 2021.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997, 142 p.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998, 148 p.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: Ensino Médio - Parte III - Ciência da Natureza, Matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC/SEF, 2000, 58 p.

BRASIL, Secretaria da Educação Média e Tecnológica. **PCN+:** Ensino Médio - Orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: MEC/SEF, 2002, 141 p.

BRASIL. Estratégia Nacional de Educação Financeira - **ENEF**. Brasília, 2010. Disponível em: https://www.vidaedinheiro.gov.br/legislacao-2/. Acesso em: 10 out. 2021.

BRASIL. Estratégia Nacional de Educação Financeira – **Plano Diretor.** 2011a. Disponível em: https://www.vidaedinheiro.gov.br/wp-content/uploads/2017/08/Plano-Diretor-ENEF-Estrategia-Nacional-de-Educacao-Financeira.pdf. Acesso em 10 out. 2021.

BRASIL. Estratégia Nacional de Educação Financeira - **Orientação para Educação Financeira nas Escolas.** 2011b. Disponível em: https://www.vidaedinheiro.gov.br/wp-content/uploads/2017/08/DOCUMENTO-ENEF-Orientacoes-para-Educ-Financeira-nas-Escolas.pdf. Acesso em: 11 out. 2021.

BRASIL, Mudanças nos Critérios de Remuneração da Poupança. Brasília, 2012. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2011-2014/2012/lei/l12703.htm. Acesso em: 08 dez 2021.

BRASIL. **Educação financeira nas escolas**: ensino médio – Bloco 2. Comitê Nacional de Educação Financeira (CONEF) – Brasília, CONEF, 2013. Disponível em: www.vidaedinheiro.gov.br/livros-ensinomédio/. Acesso em: 11 dez 2021.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular – BNCC:** Educação é a Base. Brasília: MEC, 2018, 595p.

BRITTO, R. R. **Educação Financeira:** uma pesquisa documental crítica. 2012. 262f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de fora, 2012.

CAMARGOS, M. A. **Matemática Financeira aplicada a produtos financeiros e análise de investimentos.** São Paulo: Saraiva, 2013. s/p (E-book).

CARVALHO, P. C. P.; MORGADO, A. C. de O. **Matemática Discreta** – Coleção PROFMAT. 2ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015. 192 p.

CERBASI, G. **Investimentos Inteligentes**. Rio de Janeiro: Sextante, 2019. 256p.

COSTA, H. **Entenda a diferença entre investir, poupar, especular e apostar, e por que isso é tão importante para você.** Poupar e Viver. 2016. Disponível em: https://pouparevive r.com/investimentos/investir-poupar-especular-apostar/. Acesso em: 07 jan. 2022.

DUBARD, C. **O que é um investimento? Entenda tudo sobre o conceito de investimento.** Blog Magnetis. 2019. Disponível em: https://blog.magnetis.com.br/o-que-e-investimento/. Acesso em: 27 nov. 2021.

FREITAS, B. G. **Empréstimos & Financiamentos:** uma abordagem sobre o ensino de sistemas de amortização à luz da Educação Financeira. 2021. 93 f. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional). Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Geral – CEFET/MG, Belo Horizonte, 2021.

GERHARDT, T. E.; SILVEIRA, D. T. **Métodos de pesquisa.** Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2009. 120p.

GOLDENBERG, M. **A arte de pesquisar:** como fazer pesquisa qualitativa em ciências sociais. 8ed. Rio de Janeiro: Record, 2004.

GOOGLE FINANÇAS. Disponível em: https://www.google.com/finance/

GOMES, L. E. da S. **Matemática Financeira**: uma proposta de abordagem para o Ensino Médio por meio de simulações de investimentos no Tesouro Direto. 2020. 65f. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal do Alagoas, Maceió, 2020.

GRAHAM, B. **O investidor inteligente.** Rio de Janeiro: Harper Collins Brasil, 2017. 671p.

IBGE, Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. Inflação. 2021. Disponível em: https://www.ibge.gov.br/explica/inflacao.php. Acesso em: 05 dez 2021.

INEP, Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. 2021. Disponível em: https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos. Acesso em: 14 jan 2022.

LIMA, E. L. **Números e Funções Reais** – Coleção PROFMAT. 1ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013. 289 p.

LUDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em Educação:** abordagens qualitativas. 2ed. Rio de Janeiro: E.P.U., 2014. 112p.

MACHADO, F. **Guia do Bitcoin:** como conseguir e negociar moeda virtual. 2017. Disponível em: https://veja.abril.com.br/economia/guia-do-bitcoin-como-conseguir-e-negociar-moedas-virtuais/. Acesso em: 12 dez 2021.

MELLO, C. Explorando o uso de planilhas de orçamento com alunos do ensino médio. In: SEMINÁRIO DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO FINANCEIRA ESCOLAR E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. **Anais...** Juiz de Fora: UFJF, 2019, p. 328-340

MELO, D. P. de. **EDUCAÇÃO FINANCEIRA E MATEMÁTICA FINANCEIRA:** compreendendo possibilidades a partir de um grupo de estudo com professores do ensino médio. 2019. 109 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica). Universidade Federal de Pernambuco – UFPE, Recife, 2019.

MORGADO, A. C de O.; WAGNER, E.; ZANI, S. C. **Progressões e Matemática Financeira.** 6 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015. 149p.

MUNIZ, I. Jr.; JURKIEWICZ, S. Tomada de Decisões e Trocas Intertemporais: uma contribuição para a construção de ambientes de educação financeira escolar nas aulas de matemática. **Revista de Educação, Ciências e Matemática,** Rio de Janeiro, v. 6, n. 3, p. 76-99, set/dez 2016.

MUNIZ, I. Jr. **Econs ou humanos?** Um estudo sobre a tomada de decisão em ambientes de Educação Financeira Escolar. 2016. 418f. Tese (Doutorado em Engenharia de Produção) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2016.

NUNES, L. M. A.; PAGANI, E. M. L. O que pensam professores e estudantes sobre a Matemática Financeira e Educação Financeira no Ensino Médio. In: I ENCONTRO ONLINE DE PROFESSORES QUE ENSINAM MATEMÁTICA. **Anais...** Mato Grosso: UNEMAT, 2020. Disponível em: http://matematicanaescola.com/eventos/index.php/ienopem/ienopem/paper/view/101/48. Acesso em: 15 mar. 2021.

NUNES, L. M. A.; PAGANI, E. M. L. Educação Financeira na Escola Básica: um mapeamento das pesquisas que abordam conceitos em Investimentos Financeiros desenvolvidas no âmbito do PROFMAT. **Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana – EM TEIA**. Recife, v. 12, n. 2, p. 1 – 20, jul/ago, 2021.

OBINVEST. **Olimpíadas Brasileiras de Investimentos**. Disponível em: https://obinvest.org/. Acesso em: 05 mai. 2021.

OLIVEIRA, E. A. M.; FALK, J. E. W. M.; CARVALHO, M. P.; GONCALVES, E. N da C. Parâmetros curriculares nacionais do ensino médio, formação docente e a gestão escolar. In: XXVI SIMPÓSIO BRASILEIRO DE POLÍTICA E ADMINISTRAÇÃO DA EDUCAÇÃO. **Anais...** Recife: ANPAE, 2013. v. 17, p 1-13. Disponível em: https://www.anpae.org.br/simposio26/1comunicacoes/EduardoAugustoMosconOliveira-ComunicacaoOral-int.pdf. Acesso em: 26 out 2021.

OLIVEIRA A. E.; MACHADO, F. F. S.; MARTINS, J. C.; SPOSITO, R. R. A Importância da Educação Financeira no Contexto Escolar e Familiar: Uma Amostra do Projeto Implantado na Unespar, Paraná, 2014. Disponível em: https://www.academia.edu/38159173/A_importancia_da_Educacao_Financeira_no_contexto_escolar_e_familiar?auto=citations&from=cover_page. Acesso em: 11 jan 2022.

ORGANIZAÇÃO DE COOPERAÇÃO E DE DESENVOLVIMENTO ECONÔMICO, OCDE. Recomendação sobre os Princípios e as Boas Práticas de Educação e Conscientização Financeira, 2005. Tradução. Disponível em: https://www.oecd.org/daf/fin/financial-education/[PT]%20Recomenda%C3%A7%C3%A3o%20Princ%C3%ADpios%20de%20Educa%C3%A7%C3%A3o%20Financeira%202005%20.pdf Acesso em: 20 mar. 2021.

PAGANI, E. M. L. **O Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Derivadas no Curso Técnico Integrado ao Médio através da Resolução de Problemas.** Tese de doutorado. UNICSUL, São Paulo, 2016.

PAIS, L. C.; **Didática da Matemática:** uma análise da influência francesa. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

PITZER, L. C. **Financiamentos e investimentos:** uma proposta para o Ensino Médio. 2018. 103 f. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) – Universidade do Estado de Santa Catarina, Joinville, 2018.

PONAHT, O. **Aplicação da Matemática em Investimentos Financeiros:** caderneta de poupança e títulos públicos. 2015. 79 f. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2015.

PRADO, G. M. da C. **Do orçamento doméstico ao guia de investimento de renda fixa: um pequeno manual para um investir iniciante.** 2018. 69 f. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, São Paulo, 2018.

RIBEIRO, A. J.; CURY, H. N. **Álgebra para a formação do professor: explorando os conceitos de equação e de função.** Coleção Tendências em Educação Matemática. 1ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2015. 126p

RICO. **Criptomoedas:** o que são, como funcionam e como investir? Disponível em: https://riconnect.rico.com.vc/blog/criptomoedas. Acesso lçem: 12 dez 2021.

RODRIGUES, M. U.; ANTUNES, M. M.; RODRIGUES, R. S. S. Educação financeira no currículo escolar de matemática: um olhar para o novo ENEM no período de 2009 a 2017. **Tangram – Revista de Educação Matemática**. Dourados, v. 1, n. 4, p. 23-27, nov. 2018.

SANTOS, L. T. B.; PESSOA, C. A. S. Educação financeira na perspectiva da educação matemática crítica: uma reflexão teórica à luz dos ambientes de aprendizagem de Ole Skovsmose. **Revista Boletim online de Educação Matemática (BoEM).** Joinville, v. 4, n. 7, p. 23-45, ago/dez 2016.

SANTOS, A. L.; **Uso da Calculadora do Cidadão em smartphones como ferramenta didática no Ensino da Matemática Financeira no Ensino Médio.** 2018. 70 f. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional). Universidade Estadual de Santa Cruz – UESC, Ilhéus, 2018.

SAVOIA, J. R. F.; SAITO, A. T.; SANTANA, F. DE A. Paradigmas da educação financeira no Brasil. **Revista de Administração Pública,** Rio de Janeiro, v. 41, n. 6, p. 1121 a 1141, 1 jan. 2007.

SILVA, A. M.; POWELL, A. B. Um programa de Educação Financeira para a Matemática escolar da Educação Básica. In: XI ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. **Anais...** Curitiba: PUC/PR, 2013.

SILVA, A. M. e POWEL, A. B. Educação Financeira na Escola: A perspectiva da Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico. **Boletim GEPEM**. Seropédica, n. 66, p. 3-19, jan/jun. 2015.

SOMAVILLA, A. S.; BASSOI, T. S. A Literacia financeira: cenário e perspectivas. **Revista Boletim online de Educação Matemática (BoEM).** Joinville, v. 4, n. 7, p. 7-22, ago/dez 2016.

SOMAVILLA, A. S.; SILVA, C. R. G. X.; BASSOI, T. S. A Literacia Financeira em discussão. In: XII ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (ENEM). **Anais...** São Paulo, jun 2016.

SOUZA, W. T. C. **A Educação Financeira no Ensino Médio:** da Escola para a vida. 2020. 131 f. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional). Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais – CEFET/MG, Belo Horizonte, 2020.

TESOURO DIRETO. Site do Tesouro Direto. Disponível em: https://www.tesourodireto.com.br/. Acesso em: 19 dez 2021.

VITAL, M. C. **Educação Financeira e Educação Matemática:** Inflação de Preços. 2014. 199 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Federal de Juiz de Fora – UFJF, Minas Gerais, 2014.

VIEIRA, G. S.; MELO, D. P.; PESSOA, C. A. S. Educação Financeira na BNCC: quais as orientações? In: I ENCONTRO ONLINE DE PROFESSORES QUE ENSINAM MATEMÁTICA. **Anais...** Mato Grosso: UNEMAT, 2020. Disponível em: http://matematicanaescola.com/eventos/index.php/ienopem/ienopem/paper/viewFile/51/28. Acesso em: 30 out. 2021.

WARREN, Blog. **Taxa CDI 2020: o que é, como calcular e qual seu rendimento**, 2019. Disponível em: https://warren.com.br/blog/cdi/. Acesso em: 08 dez 2021.

ZABALA, A. **A Prática Educativa:** como ensinar. Tradução: Ernani F. da F. Rosa. Porto Alegre: Artmed, 1998.

ZOCOLOTTI, A. K.; CAMPOS, E.; DENES, E. R. Educação Financeira no Ensino Médio: discutindo cesta básica. 5º Seminário de Pesquisa em Educação Financeira Escolar e Educação Matemática. **Anais ...** UFJF, Juiz de Fora – MG, 2019, p. 233-341.

BIBLIOGRAFIA

MOREIRA, V. G; PAGANI, É. M. L.; FREITAS, B. G.; NUNES, L. M. A. A constituição de um grupo de estudos de Educação Financeira no CEFET-MG – Relato de experiência. In: II ENOPEM - Encontro Nacional Online de Professores que Ensinam Matemática. **Anais...** UNEMAT, Barra do Bugres - MT, 2021, p. 1-9. Disponível em: https://matematicanaescola.com/eventos/index.php/iienopem/iienopem/paper/view/235. Acesso em: 09 out. 2021.

PROFMAT. Dissertações do PROFMAT. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Disponível em: https://www.profmat-sbm.org.br/dissertacoes/ . Acesso em: 02 mai. 2021.

PORTAL DO INVESTIDOR. Tipos de investimentos. Disponível em: https://www.investidor.gov.br/menu/primeiros_passos/Investindo/Tipos_Investimento/index_Tipos_Investimento.html. Acesso em: 10 dez 2021.

APÊNDICE A – Termo de Consentimento e Assentimento

Prezados pais e responsáveis pelos estudantes do 9º ano,

Diversas pesquisas apontam a dificuldade que muitos brasileiros têm para lidar com finanças pessoais. A Educação Financeira promove um desenvolvimento de competências pessoais e sociais, possibilitando mais condições para a tomada de decisões no que se relaciona a finanças. Nessa conjuntura, nos últimos anos, o tema ganhou relevância na sociedade, principalmente no que tange a sua abordagem no ambiente escolar.

O estudante está sendo convidado a participar de uma pesquisa de mestrado que tem como objetivo investigar como uma sequência didática sobre investimentos financeiros pode contribuir para a Educação Financeira dos estudantes. O mestrado é do programa PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - CEFET/MG, e a pesquisa é de responsabilidade da professora de Matemática, Laís Macedo de Almeida Nunes e sua orientadora de mestrado, a professora Dra. Erica Marlúcia Leite Pagani.

As atividades a serem realizadas no período de pesquisa são um questionário de sondagem (inicial), um questionário final e quatro encontros remotos com atividades que possuem intuito de promover a Educação Financeira dos estudantes. Essas atividades abordarão temas tais como Matemática Financeira, taxa Selic, inflação, investimentos financeiros e Educação Financeira.

O minicurso acontecerá por meio de 04 encontros semanais na plataforma Teams. A primeira turma terá seus encontros às quintas-feiras das 16h às 17h30, nos dias 10/06, 17/06, 24/06 e 01/07, e a segunda turma encontrarão às terças-feiras das 14h às 15h30, nos dias 15/06, 22/06, 29/06 e 06/07. A coordenação pedagógica da série acompanhará todo o processo e realização desta atividade junto aos estudantes inscritos.

Solicitamos a colaboração do estudante interessado e inscrito e, a autorização dos responsáveis, para que esse possa participar das atividades. Esclarecemos e consideramos importante que estejam cientes de que os dados dessa pesquisa serão analisados para a dissertação e publicados em eventos/revistas da área de Ensino e Educação Matemática. Salientamos que NENHUM dos participantes e nem a instituição serão IDENTIFICADOS nas análises.

Agradecemos a atenção e desejamos que seja uma experiência importante no processo de formação dos estudantes e para a pesquisa no campo da Educação Financeira. Solicitamos-lhes, por gentileza, que realizem o preenchimento deste formulário, que será a confirmação do consentimento da parte dos pais e assentimento da parte do estudante participante.

Cordialmente,

Profa Laís Macedo e Coordenador xxxx.

1. Assim, considerando que fui informado(a) dos objetivos e procedimentos da pesquisa proposta declaro que:
   ○ Li e concordo com o termo acima e confirmo participação.
   ○ Li e não concordo com o termo acima, não participaremos.
2. Nome completo e turma do(a) estudante.
   ____
3. Contato do estudante.
   ____
4. Nome completo do responsável e parentesco.
   ____
5. Contato do responsável.
   ____

APÊNDICE B – Questionário Inicial de Sondagem

1. Quantos anos você tem?
   ○ 13 anos
   ○ 14 anos
   ○ 15 anos
   ○ Outros
2. Para você, o que é Educação Financeira?
   ____
   ____
3. Você considera Educação Financeira importante para sua vida?
4. Você acha que existe diferença entre Matemática Financeira e Educação Financeira?
   ○ Sim
   ○ Não
   ○ Não sei opinar
5. Caso você tenha respondido sim à pergunta anterior, descreva brevemente a diferença entre elas (Matemática Financeira e Educação Financeira).
   ____
   ____
6. Qual a diferença entre juros simples e juros compostos?
   ____
   ____
7. Explique com suas próprias palavras o que você entende por "inflação".
   ____
   ____
8. Você recebe mesada?
   ○ Sim
   ○ Não
9. Você costuma conversar sobre dinheiro com seus pais ou familiares?
   ○ Sim
   ○ Não
   ○ Às vezes

10. Você costuma economizar o dinheiro que você recebe? Por exemplo: dinheiro de mesada, dinheiro de presente, entre outros.
    ○ Sim
    ○ Não
    ○ Às vezes
11. Se você respondeu sim à pergunta anterior, onde você guarda seu dinheiro?
    ____
    ____
12. Para você, o que é um investimento?
    ____
    ____
13. Quando você pensa em "mercado de investimentos", quais palavras vem a sua cabeça?
    ____
    ____
14. Você conhece algum desses tipos de investimentos financeiros? Assinale as alternativas que você conhece.
    ○ Caderneta de Poupança
    ○ Tesouro Direto
    ○ CDB
    ○ LCI/LCA
    ○ Debentures
    ○ Ações
    ○ Fundos de Investimentos
    ○ Outros
    ○ Não conheço nenhum tipo de investimento financeiro.
15. Qual sua expectativa em relação a esse minicurso de Educação Financeira e Investimentos? O que você espera aprender?
    ____
    ____

APÊNDICE C – Questionário Final de Feedback

1. Você gostou do minicurso? O minicurso atendeu às suas expectativas? Justifique suas respostas.

2. O minicurso foi dividido em quatro temáticas principais.
   Sobre a primeira temática: “Educação Financeira, Matemática Financeira e Calculadora do Cidadão”, classifique seu nível de satisfação e aprendizado.

   ☆ ☆ ☆ ☆ ☆

   Sobre a segunda temática: “Taxa Selic, Inflação e Rendimento Real”, classifique seu nível de satisfação e aprendizado.

   ☆ ☆ ☆ ☆ ☆

   Sobre a terceira temática: “Investimentos – Renda Fixa”, classifique seu nível de satisfação e aprendizado.

   ☆ ☆ ☆ ☆ ☆

   Sobre a quarta temática: “Investimentos – Renda Variável”, classifique seu nível de satisfação e aprendizado.

   ☆ ☆ ☆ ☆ ☆

3. Você gostou/achou útil aprender a utilizar a Calculadora do Cidadão? Justifique.

4. Após o minicurso, você se sente mais interessado a continuar pesquisando sobre temáticas que abordem Educação Financeira e/ou Investimentos Financeiros? Justifique.

5. Após ter realizado o minicurso, existe algum tema que você tem mais interesse em aprofundar?

6. Após ter realizado o minicurso, existe algum tema que você tem mais interesse em aprofundar?

7. Na sua opinião, o minicurso pode melhorar em algum ponto? Caso afirmativo, aponte-os.

8. O que você achou mais interessante no minicurso?

9. Você tem alguma observação sobre o minicurso que queria compartilhar?

APÊNDICE D – Competências específicas de Matemática para o Ensino Fundamental (BNCC)

1. Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho.

2. Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.

3. Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.

4. Fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos presentes nas práticas sociais e culturais, de modo a investigar, organizar, representar e comunicar informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las crítica e eticamente, produzindo argumentos convincentes.

5. Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.

6. Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados).

7. Desenvolver e/ou discutir projetos que abordem, sobretudo, questões de urgência social, com base em princípios éticos, democráticos, sustentáveis e solidários, valorizando a

diversidade de opiniões de indivíduos e de grupos sociais, sem preconceitos de qualquer natureza.

8. Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles.