

ENQ – 2023.1 – Gabarito

Questão 01 [1,25 ::: (a)=0,25; (b)=0,50; (c) 0,50]

Dado um número inteiro positivo n , considere a soma $S_n = 1 + 2 + \dots + (n - 1)$.

- (a) Encontre a soma S_n em função de n .
- (b) Mostre que se n é ímpar, então $S_n \equiv 0 \pmod{n}$.
- (c) Prove que se n é par, então $S_n \not\equiv 0 \pmod{n}$.

Solução

- (a) Escrevendo $S_n = (n - 1) + \dots + 2 + 1$, obtemos $2S_n = \underbrace{n + n + \dots + n}_{n-1 \text{ vezes}} = (n - 1)n$.

$$\text{Portanto } S_n = \frac{(n - 1)n}{2}.$$

- (b) Se n é ímpar, então $n = 2k + 1$, com k inteiro.

$$\text{Logo } \frac{n - 1}{2} = k \in \mathbb{Z}. \text{ Portanto } S_n = kn \equiv 0 \pmod{n}.$$

- (c) Se n é par, então $n = 2k$, com k inteiro.

$$\text{Logo } \frac{n}{2} = k \in \mathbb{Z}, \text{ com } 0 < k < n \text{ e assim } S_n = k(n - 1) \equiv -k \equiv n - k \pmod{n}, \text{ com } 0 < n - k < n.$$

$$\text{Portanto, } S_n \not\equiv 0 \pmod{n}.$$

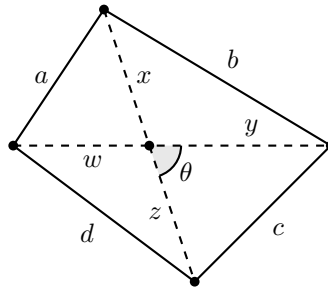
Solução alternativa item (c)

Supõe que n é par. Neste caso, escrevendo $S_n = n \cdot \left(\frac{n}{2} - \frac{1}{2}\right)$, concluímos que $\left(\frac{n}{2} - \frac{1}{2}\right)$ não é inteiro, pois $\frac{n}{2}$ é um inteiro.

Portanto S_n não é múltiplo de n , portanto $S_n \not\equiv 0 \pmod{n}$.

Questão 02 [1,25 ::: (a)=0,50; (b)=0,50; (c) 0,25]

Considere o quadrilátero convexo abaixo, representado com suas diagonais. As letras correspondem às medidas dos segmentos e $0 < \theta \leq 90^\circ$ representa um dos ângulos entre as diagonais.



- (a) Se $\theta = 90^\circ$, prove que $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$.
- (b) Se $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$, prove que $(xw + yz) \cos(\theta) = -(xy + zw) \cos(\theta)$.
- (c) Se $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$, prove que $\theta = 90^\circ$.

Solução

- (a) Para $\theta = 90^\circ$, usando o teorema de Pitágoras nos quatro triângulos retângulos :

$$\begin{cases} a^2 = x^2 + w^2 \\ x^2 + y^2 = b^2 \\ c^2 = y^2 + z^2 \\ w^2 + z^2 = d^2 \end{cases}$$

Somando as igualdades, encontramos $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$.

- (b) Utilizando a lei dos cossenos :

$$\begin{cases} a^2 + c^2 = x^2 + w^2 + z^2 + y^2 - 2(xw + yz) \cos(\theta) \\ b^2 + d^2 = x^2 + y^2 + w^2 + z^2 - 2(xy + zw) \cos(180^\circ - \theta) \end{cases}$$

Usando o fato de que $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ e que $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos(\theta)$, teremos

$$-2(xw + yz) \cos(\theta) = +2(xy + zw) \cos(\theta).$$

- (c) Da conclusão do item anterior, encontramos $(xw + yz + xy + zw) \cos(\theta) = 0$.

Nessa igualdade, quem deve ser nulo é o $\cos \theta$, ou seja, $\theta = 90^\circ$.

Questão 03 [1,25 :: (a)=0,50; (b)=0,75]

Sejam x_1, x_2, \dots, x_n números reais positivos. Definimos as médias aritmética (A_n) e harmônica (H_n) destes números como

$$A_n = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \quad \text{e} \quad H_n = \left(\frac{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}}{n} \right)^{-1}$$

- (a) Prove que $A_2 \geq H_2$, explicitando o caso em que ocorre a igualdade.
- (b) Utilize, sem provar, a desigualdade $A_3 \geq H_3$ para demonstrar que se a, b e c são números reais positivos tais que $a + b + c = 1$, então $ab + bc + ac \geq 9abc$.

Solução

- (a) Considerando $x_1 = a$ e $x_2 = b$ temos que

$$A_2 = \frac{a+b}{2} \quad \text{e} \quad H_2 = \left(\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2} \right)^{-1}.$$

Como $a, b > 0$ valem as seguintes equivalências

$$\begin{aligned} A_2 \geq H_2 &\Leftrightarrow \frac{a+b}{2} \geq \frac{2}{\frac{a+b}{ab}} \Leftrightarrow \frac{a+b}{2} \geq \frac{2ab}{a+b} \\ \frac{a+b}{2} &\geq \frac{2ab}{a+b} \Leftrightarrow a^2 + b^2 + 2ab \geq 4ab \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

A última desigualdade vale para quaisquer a, b , assim segue que $A_2 \geq H_2$ e a igualdade ocorre se, e somente se, $a = b$.

- (b) Considerando $x_1 = a, x_2 = b$ e $x_3 = c$ temos que

$$A_3 = \frac{a+b+c}{3} \quad \text{e} \quad H_3 = \left(\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}{3} \right)^{-1}.$$

Como $a, b, c > 0$ valem as seguintes equivalências

$$A_3 \geq H_3 \Leftrightarrow \frac{a+b+c}{3} \geq \frac{3abc}{bc+ac+ab} \Leftrightarrow (a+b+c)(bc+ac+ab) \geq 9abc.$$

Portanto, se $a + b + c = 1$ então $ab + bc + ac \geq 9abc$.

Questão 04 [1,25 ::: (a)=0,50; (b)=0,75]

- (a) Seja $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ um polinômio de grau n com coeficientes reais e que tenha n raízes reais. Mostre que o produto destas raízes (contadas com suas multiplicidades) é igual a $(-1)^n \frac{a_0}{a_n}$.
- (b) Sejam a, b e c números reais, dois a dois distintos e todos diferentes de zero. Suponha que todas as raízes dos 6 polinômios obtidos pelas permutações dos coeficientes do polinômio $ax^2 + bx + c$ são reais. Calcule o produto de todas as raízes desses 6 polinômios, contadas com suas multiplicidades.

Solução

- (a) Sejam r_1, r_2, \dots, r_n as raízes reais de $p(x)$, contadas com suas multiplicidades. Portanto,

$$p(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2) \cdot \dots \cdot (x - r_n)$$

Multiplicando a expressão acima, obtemos que o termo independente de x é igual a $(-1)^n a_n r_1 r_2 \cdot \dots \cdot r_n$.

Logo $(-1)^n a_n r_1 r_2 \cdot \dots \cdot r_n = a_0$, concluímos que $r_1 r_2 \cdot \dots \cdot r_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$.

- (b) Para o polinômio $ax^2 + bx + c$, listamos nas tabelas abaixo as 6 permutações dos coeficientes e os respectivos produtos de raízes (calculados usando o resultado do item (a) para $n = 2$):

Polinômio	Produto das raízes	Polinômio	Produto das raízes
$ax^2 + bx + c$	$\frac{c}{a}$	$bx^2 + cx + a$	$\frac{a}{b}$
$ax^2 + cx + b$	$\frac{b}{a}$	$cx^2 + ax + b$	$\frac{b}{c}$
$bx^2 + ax + c$	$\frac{c}{b}$	$cx^2 + bx + a$	$\frac{a}{c}$

O produto das raízes de todos os polinômios encontrados é:

$$\frac{c}{a} \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{a}{c} = 1$$

Questão 05 [1,25 ::: (a)=0,25; (b)=0,50; (c) 0,50]

Escreveremos números, no sistema decimal, utilizando apenas os algarismos 3, 4 e 6.

- (a) Quantos números com até n algarismos podemos obter?
- (b) Seja a_n a quantidade de números com exatamente n algarismos, nos quais o algarismo 6 aparece uma quantidade ímpar de vezes.
Deduza que $a_1 = 1$ e que a_n satisfaz a recorrência $a_{n+1} = a_n + 3^n$, para $n \geq 1$.
- (c) Resolva a equação de recorrência do item (b).

Solução

Escreveremos números, no sistema decimal, utilizando apenas os algarismos 3, 4 e 6.

- (a) Indicando por b_n a quantidade desses números com n algarismos temos que $b_1 = 3, b_2 = 3^2, b_3 = 3^3, \dots, b_n = 3^n$.

Assim a quantidade de números com até n algarismos é dada por $S_n = 3 + 3^2 + \dots + 3^n$.

Logo $3S_n = 3^2 + \dots + 3^n + 3^{n+1}$ e obtemos $2S_n = 3S_n - S_n = 3^{n+1} - 3$.

Portanto, $S_n = \frac{3^{n+1} - 3}{2}$.

- (b) Seja a_n a quantidade de números com n algarismos onde o algarismo 6 aparece uma quantidade ímpar de vezes.
Observe que $a_1 = 1$ pois, neste caso, temos somente o número 6.
Considerando os números com $n + 1$ algarismos, com $n \geq 1$, onde o algarismo 6 aparece uma quantidade ímpar de vezes, temos 3 possibilidades para o algarismo das unidades: 3, 4 ou 6.
- Os que terminam em 3 correspondem aos números com n algarismos onde o algarismo 6 aparece uma quantidade ímpar de vezes, portanto temos um total igual a a_n desse tipo.
 - Do mesmo modo, temos um total igual a a_n dos números que terminam em 4.
 - Os que terminam em 6 correspondem aos números com n algarismos onde o 6 aparece uma quantidade par de vezes, portanto, temos um total de $3^n - a_n$.

Concluimos que $a_{n+1} = a_n + a_n + 3^n - a_n = a_n + 3^n$.

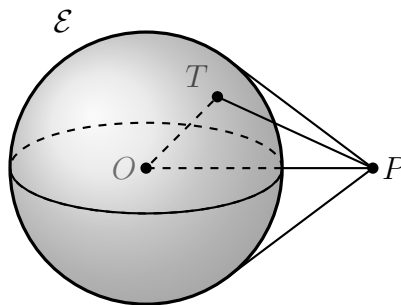
- (c) Temos que $a_2 = a_1 + 3, a_3 = a_2 + 3^2, \dots, a_{n+1} = a_n + 3^n$. Somando, termo a termo, obtemos

$$a_{n+1} = a_1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^n = 1 + \frac{3^{n+1} - 3}{2} = \frac{3^{n+1} - 1}{2}, \text{ onde } n \geq 1.$$

Portanto, $a_n = \frac{3^n - 1}{2}$, onde $n \geq 1$.

Questão 06 [1,25 ::: (a)=0,50; (b)=0,75]

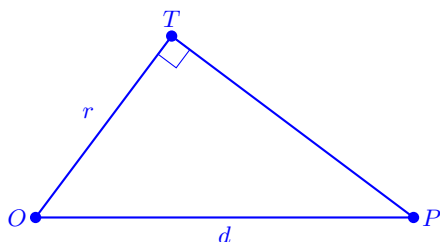
Sejam dados, no espaço, uma esfera $\mathcal{E}(O;r)$ de centro no ponto O e raio r , e um ponto P , com $\overline{PO} = d > r$.



- (a) Para $T \in \mathcal{E}$, mostre que a reta \overleftrightarrow{PT} é tangente a \mathcal{E} se, e somente se, $\overline{PT} = \sqrt{d^2 - r^2}$.
- (b) Mostre que o lugar geométrico dos pontos $T \in \mathcal{E}$ tais que \overleftrightarrow{PT} é tangente a \mathcal{E} **está contido** em um círculo, determinando seu centro, raio e o plano em que está contido.

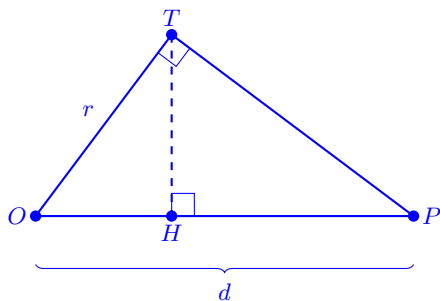
Solução

(a) Como OT é raio da esfera, temos que



$$\begin{aligned} \overleftrightarrow{PT} \text{ é tangente a } \mathcal{E} &\iff PT \text{ e } OT \text{ são perpendiculares} \iff \\ OPT \text{ é triângulo retângulo em } T &\iff \overline{PT}^2 + r^2 = d^2 \iff \\ \overline{PT} &= \sqrt{d^2 - r^2} \end{aligned}$$

(b) Seja H o pé da altura relativa ao lado OP no triângulo OPT .



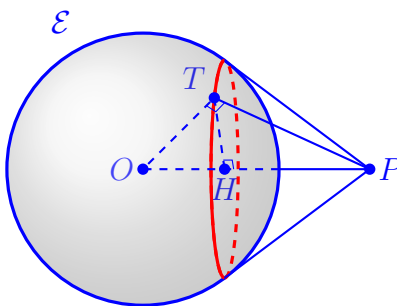
OH é projeção do cateto OT sobre a hipotenusa OP . Portanto, podemos calcular sua medida:

$$\overline{OT}^2 = \overline{OP} \cdot \overline{OH} \iff \overline{OH} = \frac{r^2}{d}.$$

Ou seja, a posição do ponto H não depende do ponto T . Também, a medida de HT pode ser calculada:

$$\overline{OP} \cdot \overline{HT} = \overline{OT} \cdot \overline{PT} \iff \overline{HT} = \frac{r\sqrt{d^2 - r^2}}{d}$$

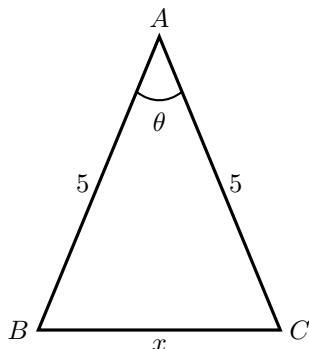
Como TH é perpendicular a OP , podemos afirmar que T pertence ao plano perpendicular à reta \overleftrightarrow{OP} e que contém o ponto H .



Concluimos, então, que o lugar geométrico procurado está contido no círculo de centro H e raio $\frac{r\sqrt{d^2 - r^2}}{d}$ contido no plano perpendicular a \overleftrightarrow{OP} .

Questão 07 [1,25 ::: (a)=0,50; (b)=0,75]

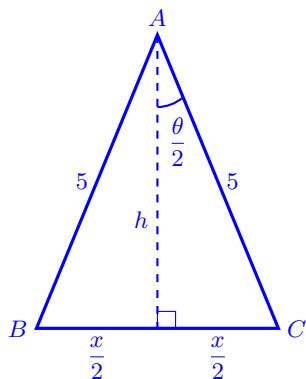
Considere um triângulo isósceles ABC , representado pela figura abaixo, cujos lados congruentes AB e AC medem 5. Assuma que o terceiro lado e o ângulo oposto a este lado sejam variáveis, medindo $\overline{BC} = x$ e $\hat{A} = \theta$, respectivamente.



- (a) Encontre a função que expressa a área do triângulo ABC em relação ao ângulo θ , indicando o domínio e a expressão da função.
- (b) Calcule a área máxima do triângulo. Quais as medidas de x e θ neste caso?

Solução

- (a) Em um triângulo isósceles sabemos que a altura em relação à base (lado eventualmente não congruente) coincide com a mediana e com a bissetriz relativas a esse lado. Daí, traçando a altura em relação ao lado BC e chamando-a de h podemos expressar x e h em função de θ :



$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\frac{x}{2}}{5} \iff x = 10 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{h}{5} \iff h = 5 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

Assim, a área do triângulo pode ser expressa, em função de θ por:

$$S(\theta) = \frac{10 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot 5 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2} = 25 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Como, para qualquer número real t , tem-se $\sin(2t) = 2\sin(t) \cos(t)$, podemos reescrever a expressão da área como

$$S(\theta) = \frac{25}{2} \sin(\theta).$$

Para que exista triângulo, devemos impor que $0 < \theta < \pi$. Assim, o domínio da função é o intervalo aberto $]0, \pi[$.

$$S :]0, \pi[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$\theta \mapsto S(\theta) = \frac{25}{2} \sin(\theta).$$

Solução Alternativa para o item (a)

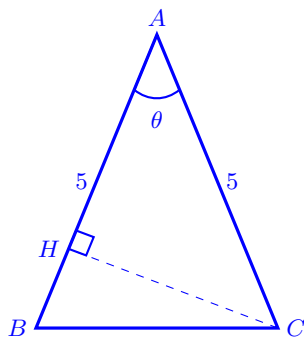
Traçando a altura CH relativa ao lado AB e olhando para o triângulo retângulo AHC , temos que,

$$\operatorname{sen}(\theta) = \frac{\overline{CH}}{\overline{AC}} \quad \therefore \quad \overline{CH} = 5 \operatorname{sen}(\theta)$$

Daí, a área do triângulo pode ser calculada como

$$\mathcal{S}(\theta) = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CH}}{2} = \frac{5 \cdot 5 \operatorname{sen}(\theta)}{2} = \frac{25}{2} \operatorname{sen}(\theta).$$

Para que exista triângulo, devemos impor que $0 < \theta < \pi$. Assim, o domínio da função é o intervalo aberto $]0, \pi[$.



$$\mathcal{S} :]0, \pi[\longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\theta \longmapsto \mathcal{S}(\theta) = \frac{25}{2} \operatorname{sen}(\theta).$$

- (b) Para $0 < \theta < \pi$, temos que $0 < \operatorname{sen}(\theta) \leq 1$, com o valor máximo atingido quando $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Daí, temos para todo $0 < \theta < \pi$

$$0 < \mathcal{S}(\theta) \leq \frac{25}{2}, \text{ com } \mathcal{S}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{25}{2}.$$

A área máxima é $\frac{25}{2}$ atingida quando o triângulo é retângulo isósceles, isto é, $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Como os catetos medem 5, podemos calcular a hipotenusa BC :

$$x^2 = 5^2 + 5^2 \quad \therefore \quad x = 5\sqrt{2}.$$

Questão 08 [1,25]

Se b é um número inteiro positivo tal que $\text{mdc}(b, 17) = 1$, prove que 17 divide pelo menos um dos números abaixo: $b^2 - 1$, $b^2 + 1$, $b^4 + 1$, $b^8 + 1$.

Solução

Como 17 é primo e $\text{mdc}(b, 17) = 1$, usando o pequeno Teorema de Fermat, temos que

$$b^{16} \equiv 1 \pmod{17}$$

Portanto, $17 \mid b^{16} - 1$. Agora, observando que

$$b^{16} - 1 = (b^8 - 1)(b^8 + 1) = (b^4 - 1)(b^4 + 1)(b^8 + 1) = (b^2 - 1)(b^2 + 1)(b^4 + 1)(b^8 + 1)$$

concluimos que 17 divide pelo menos um dos fatores $b^2 - 1$, $b^2 + 1$, $b^4 + 1$, $b^8 + 1$.

Solução Alternativa

Como $\text{mdc}(b, 17) = 1$, temos que $b \equiv \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6, \pm 7$, ou $\pm 8 \pmod{17}$.

Analisando todas as alternativas:

- (1) Suponha $b \equiv \pm 1 \pmod{17}$. Nestes dois casos, $b^2 \equiv 1 \pmod{17}$, $b^2 - 1 \equiv 0 \pmod{17}$.
- (2) Suponha $b \equiv \pm 4 \pmod{17}$. Nestes dois casos, $b^2 \equiv -1 \pmod{17}$, $b^2 + 1 \equiv 0 \pmod{17}$.
- (3) Suponha $b \equiv \pm 2$ ou $\pm 8 \pmod{17}$. Nestes quatro casos, $b^4 \equiv -1 \pmod{17}$, $b^4 + 1 \equiv 0 \pmod{17}$.
- (4) Suponha $b \equiv \pm 3, \pm 5, \pm 6$, ou ± 7 . Nestes oito casos, $b^8 \equiv -1 \pmod{17}$, $b^8 + 1 \equiv 0 \pmod{17}$.

Concluimos que 17 divide pelo menos um dos números $b^2 - 1$, $b^2 + 1$, $b^4 + 1$ ou $b^8 + 1$.