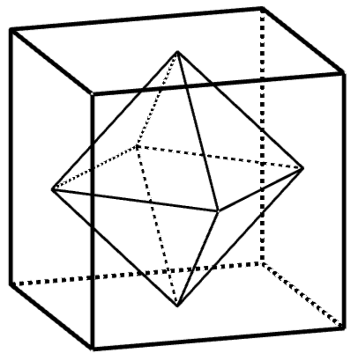
ENQ – 2022.2 – Gabarito

Questão 01 [1,25 ::: (a)=0,50; (b)=0,75]

Um octaedro regular está inscrito em um cubo de aresta 1 cm de modo que seus vértices são os centros das faces do cubo, como apresentado na figura abaixo.



Determine:

(a) a medida da aresta do octaedro.

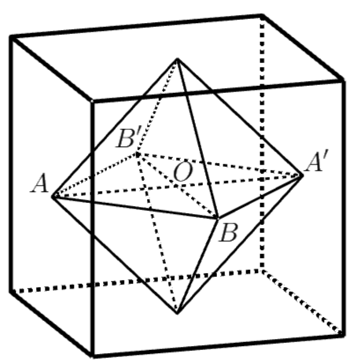
(b) o volume do octaedro.

Solução

(a) O plano paralelo a face sobre a qual o cubo está apoiado e que passa por seu centro O contém o quadrado $ABA'B'$, cujas diagonais AA' e BB' medem 1 cm cada e têm O como ponto de interseção, conforme mostrado na figura. Utilizando a relação entre a diagonal e o lado de um quadrado chegamos a

$$\overline{AA'} = \overline{AB}\sqrt{2} \Longrightarrow 1 = \overline{AB}\sqrt{2} \Longrightarrow \overline{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Como o lado AB do quadrado é a própria aresta do octaedro, concluímos que esta mede $\frac{\sqrt{2}}{2}$ cm.



(b) Como a seção média do octaedro é o quadrado $ABA'B'$, o volume do octaedro é o dobro do volume da pirâmide de base quadrada de lado $\frac{\sqrt{2}}{2}$ cm e altura $\frac{1}{2}$ cm. Portanto, o volume V do octaedro regular é igual a

$$V = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}\ \text{cm}^3.$$

Questão 02 **[1,25 ::: (a)=0,50; (b)=0,75]**

Considere a sequência a_n definida por $a_0 = a$ e $a_n = qa_{n-1} + r$, se $n \geqslant 1$, onde a, q e r são constantes.

(a) Se $q = 1$, determine a_n em função de a, r e n.

(b) Se $q \neq 0$ e $q \neq 1$, prove, por indução em n, que $a_n = aq^n + \dfrac{(q^n - 1)r}{q - 1}$, para todo $n \geqslant 1$.

Solução

(a) Se $q = 1$, então a equação fica $a_n = a_{n-1} + r$ que é uma progressão aritmética e assim $a_n = a_1 + (n-1)r$, para $n \geqslant 1$.

Como $a_0 = a$ segue que $a_1 = a + r$ e portanto $a_n = a + r + (n-1)r = a + nr$, para $n \geqslant 0$.

(b) Seja $P(n)$ a afirmação $a_n = aq^n + \dfrac{(q^n - 1)r}{q - 1}$.

i) $P(1)$ é verdadeira, já que $a_1 = aq + r = aq^1 + \dfrac{(q^1 - 1)r}{q - 1}$.

ii) Suponhamos que $P(n)$ seja verdadeira, para algum $n \geqslant 1$.

Isto significa que, para este valor de n, temos $a_n = aq^n + \dfrac{(q^n - 1)r}{q - 1}$.

Agora provaremos que $P(n + 1)$ é verdadeira.

Temos que $a_{n+1} = qa_n + r$ e usando a hipótese de indução segue que

$$a_{n+1} = q\left[aq^n + \frac{(q^n - 1)r}{q - 1}\right] + r = aq^{n+1} + \frac{q(q^n - 1)r}{q - 1} + r = aq^{n+1} + \frac{rq^{n+1} - qr + qr - r}{q - 1} = aq^{n+1} + \frac{(q^{n+1} - 1)r}{q - 1}.$$

Portanto segue o resultado.

Questão 03 [**1,25 ::: (a)=0,25; (b)=0,50; (c)=0,50**]

Numa festa de final de ano de uma empresa haverá um sorteio para distribuir 20 prêmios para 20 de seus empregados. Serão colocados 20 pedaços idênticos de papel dobrado numerados de 1 a 20 numa urna e cada uma das 20 pessoas vai retirando, um a um, um papel. O prêmio mais cobiçado é um aparelho de TV que vai para quem tirar o papel com o número 1.

(a) Determine a probabilidade de o primeiro a retirar, ganhar a TV.

(b) Determine a probabilidade de o terceiro a retirar, ganhar a TV.

(c) Determine a probabilidade de o último a retirar, ganhar a TV.

Solução

(a) A probabilidade de o primeiro retirar o papel e ganhar a TV é igual a $p = \dfrac{1}{20}$.

(b) Para que o terceiro tenha a chance de ganhar, o número 1 não saiu nas primeira e segunda retiradas, logo a probabilidade é igual a

$$p = \frac{19}{20} \cdot \frac{18}{19} \cdot \frac{1}{18} = \frac{1}{20}.$$

(c) Usando o mesmo argumento do item (b), temos que também neste caso a probabilidade é igual a

$$p = \frac{19}{20} \cdot \frac{18}{19} \cdot \frac{17}{18} \cdots \frac{1}{2} = \frac{1}{20}.$$

Solução Alternativa 1

Considere o espaço amostral $\Omega = \{1, 2, 3, \cdots, 20\}$. Observe que para qualquer i, $1 \leqslant i \leqslant 20$, este número aparece nas permutações com a mesma quantidade em qualquer posição. Como todas as permutações possíveis são igualmente prováveis, na retirada de um papel sem reposição, a probabilidade de saída de qualquer número será a mesma, não importando que seja o primeiro, o segundo, o terceiro ou o último. Concluímos então que $\dfrac{1}{20}$ é a probabilidade dos itens (a), (b) e (c).

Solução Alternativa 2

Numerando as pessoas de 1 a 20, um sorteio corresponde a uma permutação dos números de 1 a 20. A quantidade de sorteios em que o número 1 figura na i-ésima posição é 19! A quantidade de sorteios possíveis é 20! Logo, para todo $1 \leqslant i \leqslant 20$, a probabilidade da i-ésima pessoa ganhar a TV é $\dfrac{19!}{20!} = 1/20$.

Isso resolve simultaneamente os três itens (a), (b) e (c) cuja resposta é a mesma $p = \dfrac{1}{20}$.

Questão 04 [1,25 ::: (a)=0,50; (b)=0,75]

Resolva cada uma das inequações abaixo em $\mathbb{R}$.

(a) $|x^2 - 10x + 16| \leqslant 8$.

(b) $\dfrac{1}{2x-1} + \dfrac{1}{x+1} < 0$.

Solução

(a) Resolver $|x^2 - 10x + 16| \leqslant 8$ é equivalente resolver $-8 \leqslant x^2 - 10x + 16$ e $x^2 - 10x + 16 \leqslant 8$.

Na primeira desigualdade temos como solução $x \leqslant 4$ ou $x \geqslant 6$.

Na segunda desigualdade temos como solução $5 - \sqrt{17} \leqslant x \leqslant 5 + \sqrt{17}$.

Tomando a interseção das soluções acima e observando que $5 - \sqrt{17} < 4$ e que $5 + \sqrt{17} > 6$, temos que a solução da desigualdade modular é o conjunto

$\left[5 - \sqrt{17},\, 4\right] \bigcup \left[6,\, 5 + \sqrt{17}\right]$.

(b) Resolver $\dfrac{1}{2x-1} + \dfrac{1}{x+1} < 0$ é equivalente resolver $\dfrac{3x}{(x+1)(2x-1)} < 0$.

O quociente $\dfrac{3x}{(x+1)(2x-1)}$ é negativo se, e somente se, o numerador e o denominador têm sinais contrários.

Se $x < 0$, então vale $2x - 1 < 0$ e devemos ter $x + 1 < 0$, ou seja, $x < -1$.

Se $x > 0$, então vale $x + 1 > 0$ e devemos ter $2x - 1 < 0$, ou seja, $x < \dfrac{1}{2}$.

Portanto temos que a solução é o conjunto $(-\infty, -1) \bigcup \left(0,\, \dfrac{1}{2}\right)$.

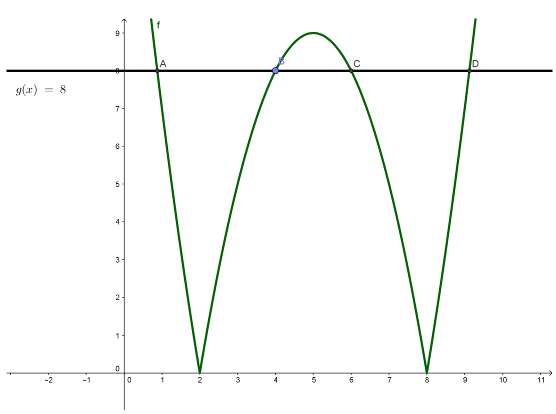
Pauta de Correção:

(a)
- Mostrar corretamente como resolver uma inequação modular. [0,25]
- Determinar o conjunto solução. [0,25]

(b)
- Desenvolver corretamente a inequação original para estudo dos sinais. [0,25]
- Determinar o conjunto solução. [0,5]

Solução Alternativa – item (a)

Na figura a seguir, foram construídos os gráficos de $f(x) = |x^2 - 10x + 16|$ e $g(x) = 8$.



Observando as interseções e determinando as abscissas desses pontos, obtemos como conjunto solução $[5-\sqrt{17}, 4\,] \cup [6, 5+\sqrt{17}\,]$.

Questão 05 [1,25 ::: (a)=0,50; (b)=0,50; (c)=0,25]

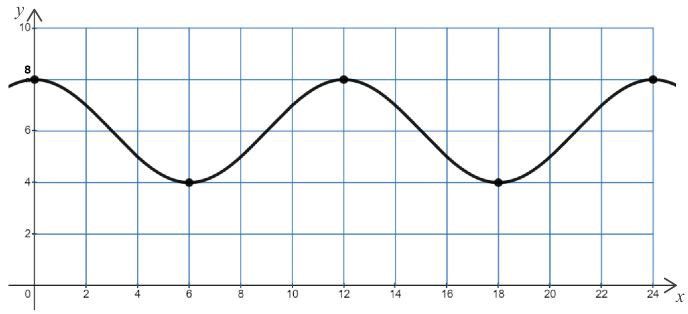
Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita periódica quando existe um número real $T \neq 0$ tal que $f(x+T) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. O menor $T > 0$ com a propriedade anterior é chamado de *período* da função f.

Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = A\cos(Bx) + C$, em que os parâmetros A, B e C são números reais, com $A > 0$ e $B > 0$.

(a) Mostre que a função f é periódica e que o seu período é $\dfrac{2\pi}{B}$.

(b) Quais os valores máximo e mínimo da função f em função dos parâmetros?

(c) Determine os valores de A, B e C da função $f(x) = A\cos(Bx) + C$ cujo gráfico é dado pela figura abaixo.



Solução

(a) Seja $T > 0$ tal que $f(x+T) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Assim

$f(x+T) = f(x) \iff A\cos[B(x+T)] + C = A\cos(Bx) + C \iff \cos(Bx + BT) = \cos(Bx)$.

Como a igualdade acima deve ser verificada para todo valor de x, podemos olhar o caso particular em que $x = 0$, e concluir que devemos ter $\cos(BT) = 1$. Daí, temos que $BT = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, ou, equivalentemente $T = \dfrac{2k\pi}{B},\ k \in \mathbb{Z}$.

Logo $f\left(x + \dfrac{2k\pi}{B}\right) = A\cos\left[B\left(x + \dfrac{2k\pi}{B}\right)\right] + C = A\cos(Bx + 2k\pi) + C = A\cos(Bx) + C = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e todo $k \in \mathbb{Z}$.

Como o período deve ser o menor número positivo com a propriedade acima, concluímos que o período de f deve ser $\dfrac{2\pi}{B}$.

(b) Sabemos que $-1 \leqslant \cos(Bx) \leqslant 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Logo, como $A > 0$, $-A \leqslant A\cos(Bx) \leqslant A$, e, daí

$-A + C \leqslant A\cos(Bx) + C \leqslant A + C$ e assim $-A + C \leqslant f(x) \leqslant A + C$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Como $f(0) = A + C$ e $f\left(\dfrac{\pi}{B}\right) = -A + C$, segue que esses valores são, respectivamente, o máximo e o mínimo de f.

(c) Para o gráfico dado, temos $A + C = 8$, $-A + C = 4$. Daí, $C = 6$ e $A = 2$.

O período do gráfico apresentado é igual 12, logo $\dfrac{2\pi}{B} = 12$, ou seja, $B = \dfrac{\pi}{6}$.

Assim, a função é $f(x) = 2\cos\left(\dfrac{\pi x}{6}\right) + 6$.

Questão 06 [1,25]

Resolva a congruência

$$17x \equiv 82 \bmod 165.$$

Sugestão: Você pode usar o fato de que $165 = 3 \cdot 5 \cdot 11$.

Solução

Observando que, $165 = 3 \cdot 5 \cdot 11$, a congruência $17x \equiv 82 \bmod 165$ é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} 17x & \equiv & 82 & \bmod & 3 \\ 17x & \equiv & 82 & \bmod & 5 \\ 17x & \equiv & 82 & \bmod & 11 \end{cases}$$

Tem-se que

$$\begin{cases} 17x & \equiv & 82 & \bmod & 3 \\ 17x & \equiv & 82 & \bmod & 5 \\ 17x & \equiv & 82 & \bmod & 11 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x & \equiv & 1 & \bmod & 3 \\ 2x & \equiv & 2 & \bmod & 5 \\ 6x & \equiv & 5 & \bmod & 11 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x & \equiv & 2 & \bmod & 3 \\ x & \equiv & 1 & \bmod & 5 \\ x & \equiv & 10 & \bmod & 11 \end{cases}$$

Agora, usaremos o Teorema Chinês dos Restos para resolver o sistema, onde $c_1 = 2, c_2 = 1$ e $c_3 = 10$.

Sejam $M_1 = 5 \cdot 11, M_2 = 3 \cdot 11, M_3 = 3 \cdot 5$ e $M = 3 \cdot 5 \cdot 11$. Considerando

$$\begin{cases} 55y_1 & \equiv & 1 & \bmod & 3 \\ 33y_2 & \equiv & 1 & \bmod & 5 \\ 15y_3 & \equiv & 1 & \bmod & 11 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y_1 & \equiv & 1 & \bmod & 3 \\ 3y_2 & \equiv & 1 & \bmod & 5 \\ 4y_3 & \equiv & 1 & \bmod & 11 \end{cases}$$

tomamos $y_1 = 1, y_2 = 2$ e $y_3 = 3$.

Uma solução particular é dada por $x = 55 \cdot 1 \cdot 2 + 33 \cdot 2 \cdot 1 + 15 \cdot 3 \cdot 10 = 626$.

Portanto, a solução é dada por $x \equiv 626 \bmod 165$ e como $626 \equiv 131 \bmod 165$, $x \equiv 131 \bmod 165$.

Solução Alternativa 1

Resolvendo a congruência $17x \equiv 82 \bmod 165$, tem-se que $17x - 82 = 165y \Longleftrightarrow 17x - 165y = 82$, onde x, y são inteiros.

Calculando o mdc entre 165 e 17 obtemos

	9	1	2	2	2
165	17	12	5	2	1
12	5	2	1	0	

Daí,

$$1 = 5 - 2 \cdot 2 = 5 - 2 \cdot (12 - 2 \cdot 5) = 5 \cdot 5 - 2 \cdot 12 = 5 \cdot (17 - 1 \cdot 12) - 2 \cdot 12 = (-7) \cdot 12 + 5 \cdot 17$$
$$1 = (-7) \cdot (165 - 9 \cdot 17) + 5 \cdot 17 = 68 \cdot 17 + (-7) \cdot 165$$

Multiplicando por 82, obtemos

$$82 = 17 \cdot (68 \cdot 82) - 165 \cdot (7 \cdot 82)$$

Portanto, $x = 68 \cdot 82 = 5576$ é uma solução particular.

A solução é dada por $x \equiv 5576 \bmod 165$ e como $5576 \equiv 131 \bmod 165$,

$$x \equiv 131 \bmod 165.$$

Solução Alternativa 2

Observando que, $165 = 3 \cdot 5 \cdot 11$, a congruência $17x \equiv 82 \bmod 165$ é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} 17x & \equiv & 82 & \bmod & 3 \\ 17x & \equiv & 82 & \bmod & 5 \\ 17x & \equiv & 82 & \bmod & 11 \end{cases}$$

Tem-se que

$$\begin{cases} 17x & \equiv & 82 & \text{mod} & 3 \\ 17x & \equiv & 82 & \text{mod} & 5 \\ 17x & \equiv & 82 & \text{mod} & 11 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x & \equiv & 2 & \text{mod} & 3 \\ x & \equiv & 1 & \text{mod} & 5 \\ x & \equiv & 10 & \text{mod} & 11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x & \equiv & 2 & \text{mod} & 3 \\ x & \equiv & 1 & \text{mod} & 5 \\ x & \equiv & 10 & \text{mod} & 11 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x+1 & \equiv & 0 & \text{mod} & 3 \\ x+1 & \equiv & 2 & \text{mod} & 5 \\ x+1 & \equiv & 0 & \text{mod} & 11 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x+1 & \equiv & 0 & \text{mod} & 33 \\ x+1 & \equiv & 2 & \text{mod} & 5 \end{cases}$$

Daí obtemos, equivalentemente, $x + 1 = 33k$ e $33k \equiv 2 \mod 5$, com k inteiro. Assim, $x + 1 = 33k$ e $k \equiv 4 \mod 5$. Finalmente temos, $k = 4 + 5t$ e $x + 1 = 33(4 + 5t)$, obtendo a solução

$$x = 131 + 165t, \text{ com } t \text{ inteiro.}$$

Questão 07 **[1,25 ::: (a)=0,50; (b)=0,75]**

Uma *tripla pitagórica* é uma tripla de inteiros positivos a, b e c tais que $a^2 + b^2 = c^2$.

(a) Mostre que, para quaisquer inteiros $m > n > 0$ os números, $m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2$ formam uma tripla pitagórica.

(b) É possível provar que toda tripla pitagórica pode ser escrita da forma acima. **Usando este fato**, mostre que em toda tripla pitagórica sempre há um múltiplo de 4.

Solução

(a) Considere inteiros $m > n > 0$. Temos que, $m^2 - n^2, 2mn$ e $m^2 + n^2$ são inteiros positivos e

$$(m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = m^4 - 2m^2n^2 + n^4 + 4m^2n^2 = m^4 + 2m^2n^2 + n^4 = (m^2 + n^2)^2$$

Portanto, $m^2 - n^2, 2mn$ e $m^2 + n^2$ formam uma tripla pitagórica.

(b) Considere a, b e c uma tripla pitagórica. Logo, existem inteiros $m > n > 0$ tais que

$$a = m^2 - n^2, \ b = 2mn \ \text{ e } \ c = m^2 + n^2$$

Temos duas possibilidades :

(1) m e n são ímpares

(2) m é par ou n é par

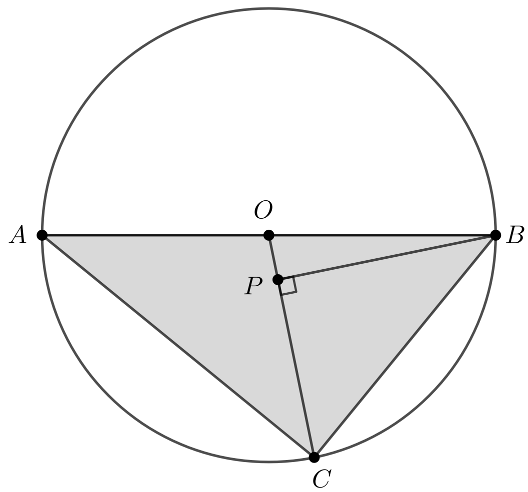
No primeiro caso, $m = 2k + 1$ e $n = 2t + 1$, com k e t inteiros. Daí

$$a = m^2 - n^2 = (2k + 1)^2 - (2t + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 - 4t^2 - 4t - 1 = 4(k^2 + k - t^2 - t)$$

é múltiplo de 4.
No segundo caso, $b = 2mn = 2(2k)n = 4kn$ ou $b = 2mn = 2m(2t) = 4mt$. Portanto, b é múltiplo de 4.

Questão 08 [1,25]

Na figura, AB é um diâmetro da circunferência de centro O e raio 5. O ponto C pertence à circunferência, P pertence ao raio OC, $B\hat{P}C = 90°$ e $\overline{OP} = 1$. Determine a área do triângulo ABC.



Solução

No triângulo retângulo OPB, o cateto OP mede 1 e a hipotenusa OB mede 5. Logo, pelo teorema de Pitágoras,

$$\overline{BP}^2 + 1 = 5^2 \therefore \overline{BP} = \sqrt{24}.$$

Agora, no triângulo BPC, de catetos $\overline{BP} = \sqrt{24}$ e $\overline{PC} = 4$, pelo teorema de Pitágoras, chegamos a

$$\overline{BC}^2 = 24 + 16 \therefore \overline{BC} = \sqrt{40}.$$

Como AB é diâmetro, o triângulo ABC também é retângulo. Sua hipotenusa AB mede 10 e seu cateto BC mede $\sqrt{40}$.

A medida do outro cateto pode ser calculada assim $\overline{AC}^2 + 40 = 100 \therefore \overline{AC} = \sqrt{60}$..

Portanto a área do triângulo ABC é

$$\frac{\sqrt{40}\cdot\sqrt{60}}{2} = \frac{\sqrt{2400}}{2} = 10\sqrt{6}.$$

Solução Alternativa

Como o triângulo OBC é isósceles, com lados $\overline{OB} = \overline{OC}$, as respectivas alturas são iguais.

Logo a altura do triângulo OBC em relação ao lado OB é igual a $\overline{BP} = \sqrt{24}$.

Mas os triângulos ABC e OBC têm a mesma altura e assim a área do triângulo ABC é igual a $10\dfrac{\sqrt{24}}{2} = 10\sqrt{6}$.